文章编号: 1006- 7329(2000)06- 0105- 03

二维势问题的杂交边界点法

张见明[1], 姚振汉[1], 李 宏[2]
(1. 清华大学 工程力学系, 北京 100084; 2. 沙市石油钢管厂, 荆州市 434001)

摘要: 提出了二维势问题的杂交边界点求解方法。该方法将用于杂交边界元的修正变分原理与移动最小二乘法结合起来, 不但具有边界元法降维的优点, 而且是一种真正的无网格方法, 即: 该方法既不需要插值网格, 也不需要积分网格, 它的输入数据只是求解域边界上的离散分布的点。数值算例表明: 该方法的数值解与解析解吻合得非常好, 并且收验速度高。域内未知量的计算不需要象在边界元法和边界点法中做的那样, 再一次沿边界积分。

关 键 词: 无网格法; 杂交边界点法; 移动最小二乘法
中图分类号: O241.83 文献标识码: A

自从 Belytchko 提出无单元伽辽金法(EFG)[1] 以来, 无网格法越来越引起人们的兴趣和重视。Belytchko 的无网格法, 尽管函数插值不需要网格, 但其'能量'积分仍然是在一个背景网格上进行。不过该背景网格可以不与求解域重合, 也不需要经过节点, 它可以是覆盖整个求解域的任意规则网格。尽管如此, EFG 还不能算是"真正的无网格法"。Zhu 等于1998年提出局部边界积分方程(LBIE)[2], 结合 MLS 函数插值方案, 得到一个既不需要插值网格, 也不需要积分网格的"真正的无网格法"。Mukherjee 等把 MLS 函数插值引入到边界积分方程中, 提出了一种只需在边界上布置节点的方法, 称之为边界点法(BNM)[3]。这种方法的边界积分仍然需要边界网格。

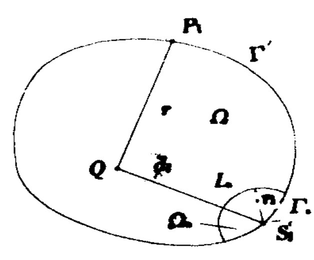
LBIE 是真正的无网格法, 但需要在域内布点; BNM 只在边界上布点, 但要在边界上划分网格用于数值积分。这里就产生一个问题: 是否可能存在一种方法, 该方法既象 BNM 一样仅在边界上布点, 从而降低求解问题的维数; 同时又象 LBIE 等方法一样, 完全不需要任何网格(不论是用于插值, 还是用于积分), 从而是一种真正的无网格法? 答案是肯定的。这种方法就是本文提出的杂交边界点法(Hybrid Boundary Node Method, HBNM)。该方法将用于杂交边界元的修正变分原理与移动最小二乘法结合起来, 实现了边值仅在边界上布点的真正的无网格边值问题求解方法。

1 二维势问题杂交边界点法的积分方程

本节将用修正变分原理和 MLS 插值推导求解二维 Laplace 方程的杂交边界点法的积分方程。

如图1所示, 对于二维域 , 其边界 = $_u$+ $_q$, $\bar{u}$ 和 $\bar{q}$ 分别是势已知的边界 $_u$ 和法向流已知的边界 $_q$ 上的边界值, n 是边界外法向, n_i 是法向分量。则 Laplace 方程的边值问题可表示为

$$\begin{aligned} u_{,ii} &= 0 & x &\in \\ u &= \bar{u} & x &\in {}_u \\ u_{,i}n_i \equiv q &= \bar{q} & x &\in {}_q \end{aligned} \qquad (1)$$



= $L_s \cup$ $_s$ $_s$= $_s \cap$
图1 求解域 和节点 S_J 的子域 $_s$

本文提出的杂交边界点法基于修正变分原理。在修正变分原理中有三个相互独立的场函数。对

收稿日期: 2000- 05- 01
作者简介: 张见明(1965-), 男, 湖北孝感人, 工程师, 硕士, 主要从事无网格法的研究。

于势问题,这三个场函数是域内势函数 u、边界上势函数 $\tilde{u}$ 和边界上法向流函数 $\tilde{q}$。相应的修正泛函 $_{AB}$ 为

$$_{AB} = \int \frac{1}{2} u_{,i} u_{,i} \mathrm{d} \quad - \int \tilde{q}(u - \tilde{u}) \mathrm{d} \quad - \int_{q} \bar{q}\tilde{u} \mathrm{d} \tag{2}$$

这里,边界势函数满足强制边界条件,即在 $_u$ 上 $\tilde{u} = \bar{u}$。

由 $_{AB} = 0$可以得到下面的弱积分方程:

$$\int (q - \tilde{q}) \ u \mathrm{d} \quad - \int u_{,ii} \ u \mathrm{d} \quad = 0 \tag{3}$$

$$\int (u - \tilde{u}) \ \tilde{q} \mathrm{d} \quad = 0 \tag{4}$$

上述方程对任意子域都成立。例如,对于子域 $_s$,有下面的积分方程

$$\int_{_s + L_s} (q - \tilde{q}) \ u \mathrm{d} \quad - \int_{_s} u_{,ii} \ u \mathrm{d} \quad = 0 \tag{5}$$

$$\int_{_s + L_s} (u - \tilde{u}) \ \tilde{q} \mathrm{d} \quad = 0 \tag{6}$$

子域 $_s$ 取为求解域 与以节点 S_J 为圆心的一个小圆的交集(见图1)。

在方程(5)和(6)中, $_s$ 上的 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{q}$ 由移动最小二乘法插值(MLS)为

$$\tilde{u}(s) = \sum_{I=1}^{N} {}_I(s) u_I \quad \tilde{q}(s) = \sum_{I=1}^{N} {}_I(s) q_I \tag{7}$$

其中 $_I(s)$ 为 MLS 插值中节点 S_I 的形函数(参见文献[3])。为使 L_s 上的积分等于0。取 u 和 $\tilde{q}$ 为 MLS 插值中的权函数,即

$$u(Q) = \tilde{q}(Q) = v_J(Q) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left[\ (d_J / c_J)^2\right] - \exp\left[\ (r_J / c_J)^2\right]}{1 - \exp\left[\ (r_J / c_J)^2\right]} & 0 \le d_J \le r_J \\ 0 & d_J \ge r_J \end{cases} \tag{8}$$

求解域 内的势函数 u 和某一方向上的流函数 q 表示为

$$u = \sum_{I=1}^{n} U_I x_I \qquad q = \sum_{I=1}^{n} \frac{U_I}{n} x_I \tag{9}$$

其中, U_I 是以节点 P_I 为源点的基本解; x_I 是未知参数; n 是边界节点总数。将(7)、(8)和(9)式代入方程(5)、(6),并略去方程(5)中第二项,得到

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{n} \int_{_s} \frac{U_I}{n} v_J(Q) x_I \mathrm{d} \quad &= \sum_{I=1}^{n} \int_{_s} {}_I(s) v_J(Q) q_I \mathrm{d} \\ \sum_{I=1}^{n} \int_{_s} U_I v_J(Q) x_I \mathrm{d} \quad &= \sum_{I=1}^{n} \int_{_s} {}_I(s) v_J(Q) q_I \mathrm{d} \end{aligned} \tag{10}$$

对所有节点列出上面两个方程,则得到求解该问题的方程组。除边界条件用节点的虚值与实值变换方法施加(参见文献[4])外,其他过程同普通边界元法。

2 算 例

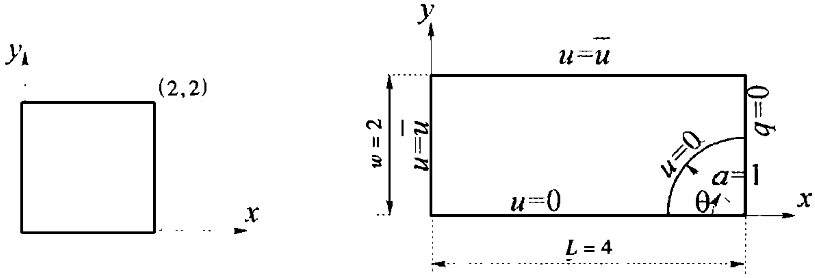
本文给出了三个算例。

算例1 正方形域上的 Dirichlet 问题

该问题是一个2×2正方形域,在四条边界上都施加强制边界条件,如图2所示。其精确解为 $u = -x^3 - y^3 + 3x^2 y + 3xy^2$。每边均布20点,对角线[(0,0),(2,2)]上势的计算值及理论值示于图3。

算例2 正方形域上的混合问题

该问题和第一个问题一样,只是在四条边界的左右两边上改为施加自然边界条件。节点布置情况亦同算例1。对角线[(0,0),(2,2)]上势的计算值及理论值示于图4。



例1、例2的正方形域　　　　例3无穷域上绕一圆柱的势流问题

图2　各算例的求解域几何及边界条件

算例3　无限域上的势流问题

考虑无限域中绕一圆柱的势流, 利用对称性, 取左上四分之一域的一部分, , 几何结构及边界条件如图2所示。其精确解为 $u = y\{1- a^2/[y^2+(x-L)^2]\}$。对角线 $[(0,0),(2,4)]$ 上势的计算值及理论值示于图5。

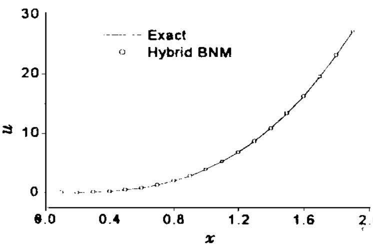


图3　算例1的结果比较

3　结　论

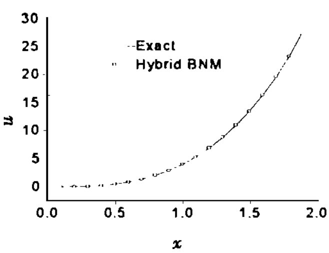


图4　算 例2结果比较

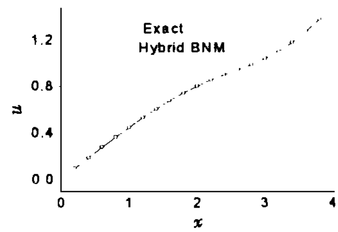


图5　算例3结果比较

本文提出并实现了求解二维势问题的一种 “真正的无网格法 ”—— 杂交边界点法。数值算例表明: 该方法具有很高的计算精度。

杂交边界点法与LBIE 及MLPG 相比, 将求解问题降低一维。它的输入数据只是求解域边界上的离散分布的节点, 从而大大减少了前处理工作量, 适应于形状复杂的物体。对于三维问题, 该方法将具有更为明显的优势。

杂交边界点法与 BNM 或BEM 相比, 具有下述优点:

(a) 该方法绝对不需要任何网格, 无论是用于插值, 还是用于积分, 是一种 “真正的无网格法 ”。

(b) 域内未知量的计算不需要再一次沿边界积分, 从而减少后处理计算量。

该方法能够很容易地推广到三维问题及弹性力学问题。

该方法前后处理简单, 极易与CAD 软件接口, 人工工作量小, 因而具有良好的工程应用前景。

(下转第111页)

discussed. 1. The optimum position of collocation point is reevaluated and it is found that accuracy of integrals, especially the nearly singular integrals, is the key factor that influences the accuracy of discontinuous boundary element analysis. 2. Discontinuous boundary element is employed for combination of FEM-BEM coupling procedure. The patch test, devised by Lu et al, is reconsidered. It is demonstrated that coupling procedure by discontinuous boundary element can achieve results of high accurary.

Key words: Discontinuous BEM; Optimum Collocation; Patch Test; Neary-singular integrals

---

(上接第107页)

参考文献:

[1] Belytchko T, Lu YY and Gu L, Element free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229～256

[2] Zhu T, Zhang J and Atluri SN. A local boundary integral equation(LBIE) method in computation mechanics, and a meshless discretization approach [J]. Computational Mechanics, 1998, (21): 223～235

[3] Mukherjee YX and Mukherjee S. The boundary node method for potential problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, (40): 797～815

[4] Atluri SN, Kim HG, Cho JY. A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov- Galerkin(MLPG), and Local Boundary Integral Equation(LBIE) methods [J]. Computational Mechanics, 1999, (24): 348～372

A New Hybrid Boundary Node Method for Two-dimensional Potential Problem

ZHANG Jian-ming[1], *YAO Zhen-han*[1], *LI Hong*[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2. Shashi Factory of Petroleum Piping, Shashi, Hubei 434000, China)

Abstract: A new regular hybrid boundary node method based on a modified functional and the moving least squares approximation is developed in this paper, which combines the advantages of both the MLBIE and the BNM. Numerical examples for the solution of 2D Laplace equation show that high rates of convergence with mesh refinement and high accuracy of results with a small number of nodes are achievable. No singularities are involved and no further integration are required for computing the unknown variables inside the domain as in the conventional BEM and BNM.

Keywords: meshless methods; regular hybrid boundary node methods; moving least square approximation