

# 一种基于子域分解的表面混合网格生成方法

汪攀 韩磊 鞠传明 池宝涛 张见明<sup>†</sup>

湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082

**摘要:** 主要介绍了一种新的基于子域分解的混合网格生成方法。该方法首先用映射法生成结构化背景网格, 并确定实体表面上包含的小孔、键槽等小特征在背景网格中的位置, 然后删除这些小特征覆盖的背景网格, 并在这些区域内生成三角形网格, 最后将剩余的背景网格和生成的三角形网格合并, 即得到整个目标域的网格。该算法综合了映射法效率高、网格质量好、四边形网格计算精度高以及三角形网格几何适应能力强的优势。数值实验表明, 针对复杂的实体表面, 新方法能够全自动的生成质量较好的混合网格, 生成的网格质量及算法效率均优于传统的推进波前法和铺砖法。

**关键词:** 混合网格; 背景网格; 网格生成; 子域分解

**中图分类号:** TP391

## A new surface hybrid mesh generation method based on sub-domain decomposition

WANG Pan HAN Lei JU Chuanming CHI Baotao ZHANG Jianming<sup>†</sup>

State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for

Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082

**Abstract:** A new hybrid mesh generation method based on subdomain decomposition is proposed in this paper. First, the structured background mesh is generated by mapping method and the location of small feature such as hole and keyway is determined. Then, the meshes which are covered by small feature are eliminated from background mesh, and unstructured triangular mesh is generated in this region. Finally, the mesh of target domain is obtained by combining the background mesh and the unstructured triangular mesh. It is capable of preserving the advantages of mapping's high efficiency and high quality of the meshes, high computational accuracy of quadrangle mesh and the powerful geometric adaptive capacity of triangle mesh. Numerical experiments are presented to demonstrate that the proposed method could generate high quality hybrid meshes for complex surface automatically, the quality of resulting meshes and the algorithm efficiency are superior to traditional methods such as advancing front method and paving.

**Key words:** hybrid mesh; background mesh; mesh generation; subdomain decomposition

## 0 引言

在求解各类工程和科学计算问题上, 有限元法或边界元法<sup>[1-2]</sup>已成为最有效的数值分析方法之一, 其中网格的划分, 直接影响计算精度和计算效率。在表面网格剖分方法中, 三角形网格的自动生成技术已经相当成熟, 如 Delaunay 三角剖分算法<sup>[3-4]</sup>, 前沿推进法(Advancing Front Method, AFM)<sup>[5]</sup>等。在实际应用中, 结构化的四边形网格在计算精度和计算效率上都优于三角形网格, 但是相对于三角形网格的自动生成, 四边形网格的自动生成算法不是很成熟, 常见的四边形网格生成算法有映射法<sup>[6]</sup>、Q-Morph 算法

<sup>[7-8]</sup>、铺砖法<sup>[9-10]</sup>, 而且这些算法往往比较复杂, 效率低, 或者生成的网格质量不好。

在机械产品中, 经常遇到含有小孔, 键槽等小特征的零部件, 在这些零部件中, 若忽略这些小特征, 则有一部分零部件的实体表面可以用映射法或子域映射法生成质量非常好的结构化四边形网格, 可是由于这些小特征的存在, 无法用映射法生成结构化网格, 为了解决这一问题, 本文提出了一种新的基于子域分解的混合网格生成方法, 新方法是基于“分而治之”思想的提出的一种多子域方法, 该方法首先将复杂的目标域分解为多个简单的子域, 然后在各个子域上进行

网格剖分,最后将各个子域的网格数据进行组装,从而得到整个目标域的网格。对于带小孔、键槽等小特征的表面,可将目标域的网格分为两块,第一块是背景网格中删除小孔覆盖的区域后剩余的网格,这一部分区域不需要进行网格划分,取有效的背景网格即可,第二块是包含小特征的一个矩形空腔,这一部分区域相对狭小,且无规则,对这一子块进行网格剖分的时候,可以选用健壮性较好的算法生成非结构化的三角形网格。本文生成的网格是用于边界元软件开发的前处理过程,由于边界元法特殊的优势,面与面之间的网格可以不连续。

## 1 四边形质量因子

网格质量直接影响计算精度,本文采用几何准则对生成的网格质量进行评价。如图1所示的四边形ABCD,连接其对角线AC、BD,得到四个三角形 $\Delta_{ABC}$ 、 $\Delta_{ABD}$ 、 $\Delta_{CDB}$ 、 $\Delta_{CDA}$ ,先计算这四个三角形的质量因子,然后根据这四个三角形的质量因子,得到四边形ABCD的质量因子。

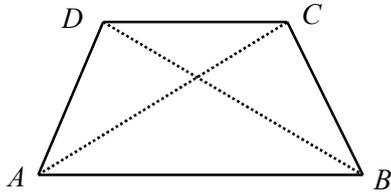


图1 四边形网格的质量因子

Fig.1 Quality factor of quadrilateral mesh  
三角形的质量 $\alpha$ 因子定义如下:

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{S_{\Delta ABC}}{\|AB^2 + BC^2 + CA^2\|},$$

$\alpha$ 的意义就是三角形的面积与边长的平方和之比, $0 < \alpha \leq 1$ , $\alpha$ 越大表示质量越好,令四个三角形 $\Delta_{ABC}$ 、 $\Delta_{ABD}$ 、 $\Delta_{CDB}$ 、 $\Delta_{CDA}$ 的 $\alpha$ 因子依次为 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ ,假设 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ ,则四边形ABCD的质量 $\beta$ 因子定义如下:

$$\beta = \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2}$$

## 2 算法原理

本文提出的算法是一种基于子域分解的网格生成方法,该方法将一个复杂实体表面分解多个子域,然后在子域上进行网格划分,最后将子域网格合并,得到整个目标域的网格,其主要步骤如下:

### 1) 生成背景网格

以外边界为基础,用映射或子域映射法生成结构化的四边形网格,结构化网格有很多优点:网格生成的速度快,网格生成的质量好,数据结构简单,算法效率高。

### 2) 确定小孔的位置

点在背景网格中的位置用参数 $N_{col}$ 、 $N_{row}$ 表示,其中 $N_{col}$ 表示在背景网格中的列数, $N_{row}$ 表示在背景网格中的行数。为了确定小孔的位置,首先离散小孔边界得到一系列的点,然后计算这些点对应的 $N_{col}$ 、 $N_{row}$ ,最后通过这些点在背景网格中的位置来确定小孔的位置。

### 3) 生成三角形网格

去除小孔覆盖的背景网格,得到一个空腔,将此空腔,和空腔包含的小孔作为前沿,运用其他健壮性较强的网格生成算法(本文是用推进波前法)生成三角形网格。

### 4) 数据的组装

将有效的结构化四边形网格和非结构化三角形网格组装起来,得到整个目标域的网格数据。

## 3 算法实现过程

### 3.1 确定小孔在背景网格中的位置

小孔在背景网格中的位置由 $N_{colL}$ 、 $N_{colR}$ 、 $N_{rowD}$ 、 $N_{rowU}$ 四个参数确定,其中 $N_{colL}$ 、 $N_{colR}$ 表示矩形框从第几列到第几列, $N_{rowD}$ 、 $N_{rowU}$ 表示矩形框从第几行到第几行。具体方法如下:首先将小孔的边界离散,得到一系列的点,在参数空间,计算这每一个点在背景网格中的位置 $N_{col}$ 、 $N_{row}$ 。在图2所示的背景网格中,假设点P

在参数空间的坐标为 $(u, v)$ ，第1行1列的点设为基准点，如图2所示的 $(u_0, v_0)$ ，设 $U$ 向离散段数为 $N_U$ ， $V$ 向离散段数为 $N_V$ ，则 $N_{col}$ 和 $N_{row}$ 可以通过下式计算：

$$N_{col} = (u - u_0) / (U_{max} - U_{min}) * N_U$$

$$N_{row} = (v - v_0) / (V_{max} - V_{min}) * N_V$$

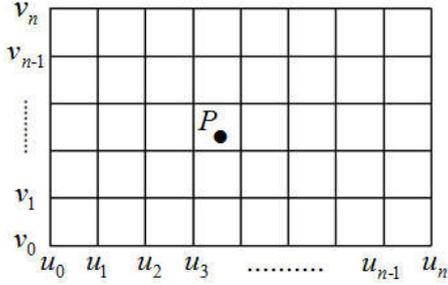


图2 点在背景网格中的位置

Fig.2 The location of point in the background mesh

图3所示的背景网格中，由于在参数空间，相邻的节点不是等距的，所以不能用图2中的方法求 $N_{col}$ 和 $N_{row}$ ，此时应按如下方法计算：假设背景网格总的行数为 $N+1$ ，总的列数为 $M+1$ ，标记背景网格中任意一个节点的坐标为 $(u_m, v_n)$ ，其中 $m$ 表示例数， $n$ 表示行数，假定 $P$ 点的坐标为 $(u, v)$ ，首先确定 $P$ 点所在的列，若 $P$ 点在 $(u_m, v_0)$ ， $(u_{m+1}, v_0)$ ， $(u_{m+1}, v_N)$ ， $(u_m, v_N)$ 所构成的矩形框内，则有 $N_{col} = m$ ，然后在确定 $P$ 点位于哪一行，若点 $P$ 在 $(u_m, v_n)$ ， $(u_{m+1}, v_n)$ ， $(u_{m+1}, v_{n+1})$ ， $(u_m, v_{n+1})$ 所构成的矩形框内，则有 $N_{row} = n$ ，此时点在背景网格中的位置坐标 $(N_{col}, N_{row})$ 为 $(m, n)$ 。

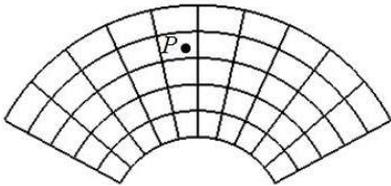


图3 点在背景网格中的位置

Fig.3 The location of point in the background mesh

在得到的 $N_{col}$ 、 $N_{row}$ 的集合中， $N_{colL}$ 等于最小的列数， $N_{colR}$ 等于最大的列数， $N_{rowD}$ 等于最小的行数， $N_{rowU}$ 等于最大的行数。实际操作中，可以根据需要适当的将空腔扩大，避免了空腔与小孔边界构成的区域过于狭长而导致生成的三角形网格质量不理想。

### 3.2 确定有效的背景网格

小孔覆盖的背景网格是无效的，这一部分的网格数据需要去除，如何快速的定位这些无效的网格数据，将在很大程度上影响网格生成的效率。假设小孔在背景网格中的位置参数已确定，为 $N_{colL}$ 、 $N_{colR}$ 、 $N_{rowD}$ 、 $N_{rowU}$ ，则小孔覆盖的无效节点在存储节点的一维数组 $Node[]$ 中的位置可以通过下式计算：

$$for(i = N_{rowD} + 1; i < N_{rowU}; i++)$$

$$for(j = N_{colL} + 1; j < N_{colR}; j++)$$

$$Node[k] = N_U * i + j;$$

确定了这些无效的点后，通过结构化网格的拓扑关系搜索到与这些无效的节点连接的边，标记这些搜索到的边为无效边，小孔覆盖的无效的单元在存储单元的一维数组中 $Cell[]$ 的位置可以用下式计算：

$$for(i = RowD; i < RowU; i++)$$

$$for(j = ColL; j < ColR; j++)$$

$$Cell[k] = (N_U - 1) * i + j;$$

在背景网格中，去除这些无效的节点、边、单元之后，得到一个空腔。相对于整个目标域而言，此空腔相对狭小，在此狭小的空腔内，本文是用比较成熟且自适应能力较强的推进波前法生成非结构化的三角形网格。

### 3.3 得到前沿

用合适的尺寸对小孔进行离散，得到一系列的离散点，这一系列的点以及空腔的边界，即为新的前沿，将新的前沿加入到前沿链表中，作为推进波前法的初始前沿，在基

于八叉树以及自适应尺寸场共同作用的尺寸控制方式下,可以生成质量良好且过渡均匀的非结构化三角形网格。由于每次输入推进波前法的空腔以及空腔内包含的小孔必须一一对应,因此,当实体表面上包含多个小孔时,应对其小孔进行循环,每次输入一个空腔以及其包含的小孔,当小孔所对应的空腔有重叠时,会导致前沿相交,无法形成封闭的前沿,此时应对空腔进行特殊的处理,将重叠的空腔合并,得到一个连续的封闭的环,并将其加入前沿链表,合并前后的空腔前沿如图4所示。

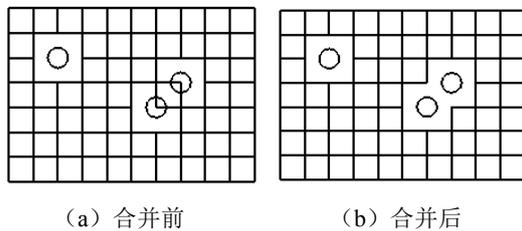


图4 空腔前沿

Fig.4 The front of cavities

### 3.4 边界处网格质量的改善

实际计算中,边界处的网格质量尤为重要,本文采用的推进波前法可以在边界处生成质量较好且过渡均匀的三角形网格,但是在同等条件下,其计算精度和效率还是低于质量较好的结构化四边形网格。为了改善小孔附近的网格质量,我们可以在小孔边界处以按层推进的方式铺设结构化四边形网格,推进的层数由小孔边界与空腔的最近距离决定,假设推进的层数为 $N$ ,小孔边界与空腔的最近距离为 $D_{min}$ ,网格尺寸为 $size$ ,则有 $N = D_{min} / size - 2$ ,其中减2的几何意义是预留2层,使得这部分过渡区域能够用推进波前法生成质量相对较好的三角形网格,当铺设好的四边形网格边界与空腔边界较近时,即使是自适应能力较强的推进波前法也无法生成质量较好的三角形网格。如图5所示的情形,小孔边界推进的层数为2,如图6所示的情形,小孔的边界与空腔边界距离较小,此时推进的层数为0。

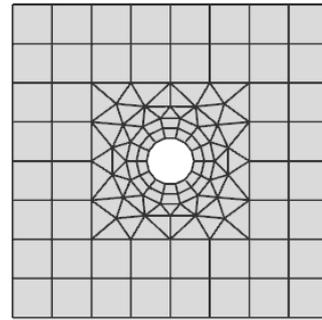


图5 边界推进层数为2

Fig.5 The layer of boundary advancing is two

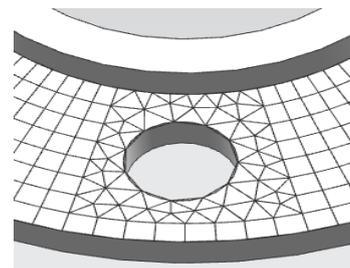


图6 边界推进层数为0

Fig.6 The layer of boundary advancing is zero

有时候会遇到小孔理想的离散尺寸远小于全局的网格尺寸,在这种情况下,为了满足计算精度,小孔附近的网格尺寸不宜过大,由于网格连续性,这就会导致网格数目的增加,为了解决这个问题,本文引入了过渡单元,既满足了小孔附近较小的网格尺寸,从而保证了计算精度,又满足了背景网格较大的网格尺寸,从而减少了网格数目,网格划分如图7所示。

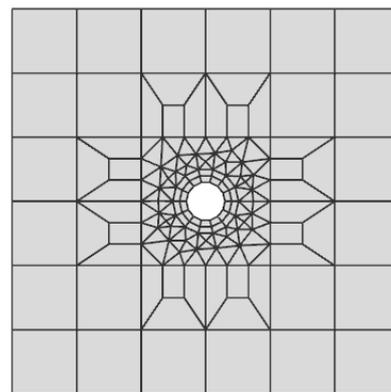


图7 添加过度模块后的网格划分

Fig.7 The mesh generation with Transition template

综上所述,实现此算法的流程如下:

1. 用映射法或子域映射法生成结构化的四

- 边形背景网格。
2. 确定每个小孔在背景网格中的位置，然后删除这些小孔覆盖的背景网格。
  3. 根据小孔在背景网格中的位置，对小孔进行分组，将空腔重叠的小孔分为一组，并对其空腔进行合并操作，假设小孔分为N组。
  4.  $for(i = 0; i < N; i++)$ 
    - {
    - 4.1 得到小孔对应的空腔的前沿。
    - 4.2 离散小孔，得到实体边界的前沿。
    - 4.3 根据实体边界前沿与空腔的距离，选取合成的推进层数，生成结构化四边形网格。
    - 4.4 将上述前沿输入推进波前法生成三角

- 形网格；
- }
5. 将有效的背景网格和生成的三角形网格进行组装，得到整个目标域的网格数据，组装后的网格在三角形和四边形的交界处满足网格连续性。

#### 4 算例

下面给出四个常见的机械零部件模型的混合网格划分实例，其中图 8-a 是带孔洞的垫片，图 8-b 是法兰盘，图 8-9 是阶梯轴，图 9 是带焊缝的钢架。

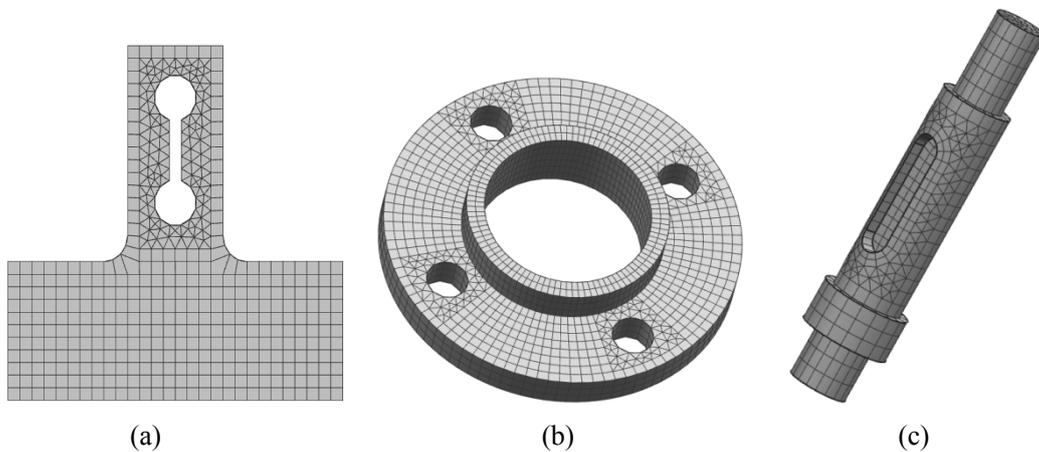


图 8 垫片、法兰盘及阶梯轴的混合网格划分

Fig.8 The hybrid meshes of the shim and flange and stepped shaft

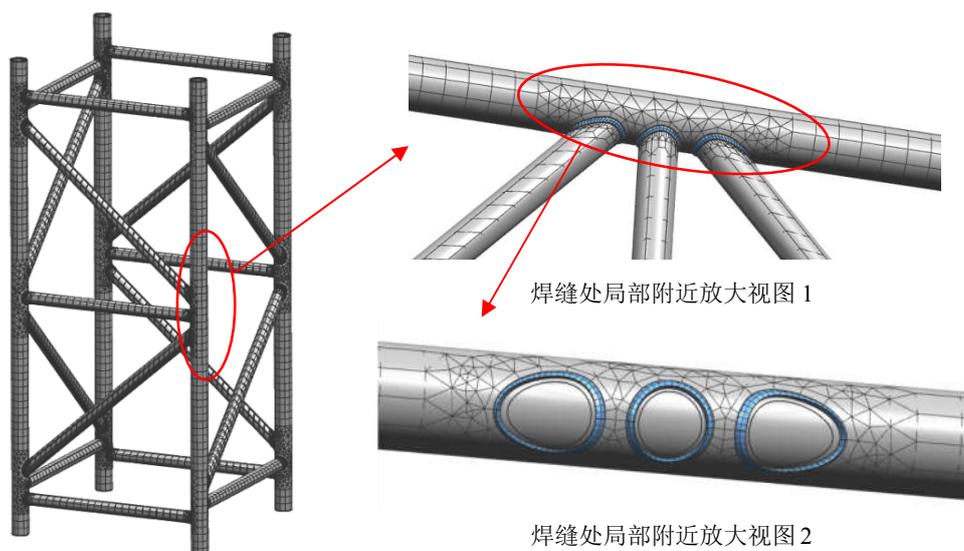


图 9 带焊缝的钢架的混合网格划分

Fig.9 The hybrid mesh generation of steel frame with welds

从图 8、9 可知, 本文提出的新方法在实际应用中的可行性, 在网格分布上, 从区域上来说是大部分区域的结构化四边形网格和少部分区域的非结构化三角形网格。需要特别指出的是, 对于带焊缝的钢架模型, 由于系统误差或布尔操作等原因, 使得 CAD 数据中存在着小短边、窄面和不光滑边界等常见人工特征<sup>[11]</sup>, 这些特征使得生成的网格质量较差, 甚至会导致网格划分失败, 如用铺砖法生成四边形网格。对经过拓扑修复后的钢架模型, 用传统的推进波前法则对钢

架进行网格划分, 会生成 43576 个节点, 73786 个单元, 采用本文介绍的新方法, 生成的节点数和单元数分别为 36518、43267, 由此可见, 新方法较大幅度的减少了生成网格的规模。为了进一步说明新方法优越性, 将法兰盘和阶梯轴中用新方法进行网格划分的实体表面分别用推进波前法和铺砖法进行网格划分, 网格划分结果如图 10 及图 11 所示, 并对其生成的网格数量、质量及效率进行对比, 结果如表 1 所示。

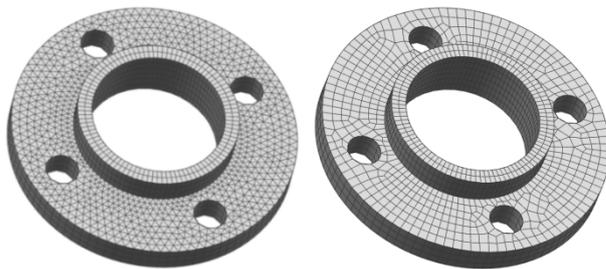


图 10 法兰盘的三角形网格及四边形网格生成  
Fig.10 The mesh generation of the flange

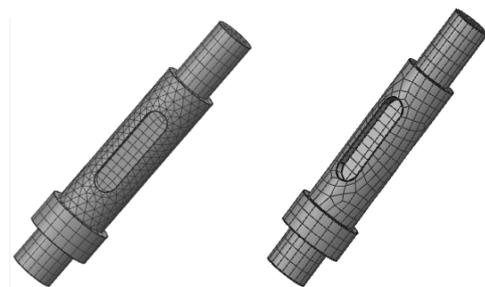


图 11 阶梯轴的三角形网格与四边形网格生成  
Fig.11 The mesh generation of the stepped shaft

表 1 网格数量、质量及三种方法效率的对比

Tab.1 Comparison of quality and number of the mesh and efficiency of the three methods

实例	网格数量及质量分布							网格总数	耗时 (ms)
	方法	三角形	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\text{aver}}$	四边形	$\beta_{\min}$	$\beta_{\text{aver}}$		
法兰盘	新方法	356	0.527	0.938	567	0.885	0.925	923	488
	AFM	1612	0.527	0.978	--	--	--	1612	2260
	铺砖法	--	--	--	614	0.197	0.794	614	9130
阶梯轴	新方法	164	0.731	0.985	208	0.999	1.000	372	447
	AFM	732	0.772	0.988	--	--	--	732	1253
	铺砖法	--	--	--	279	0.262	0.821	279	2167

从表 1 可知, 相对于推进波前法, 新方法生成的网格数量减少了近 1/2, 在耗时上, 对于法兰盘和阶梯轴, 用新方法的耗时分别为推进波前法的 1/5 和 1/3 左右; 相对于铺砖法, 新方法较程度的提高了生成网格的质量, 且耗时分别为铺砖法的 1/18 和 1/5。

## 5 结论

本文提出的新方法相对于传统的网格生成方法, 尤其独特的优势, 具体如下:

- (1) 新方法生成的网格是由绝大部分区域的结构化四边形网格和少数区域的三角形网格组成, 整个目标域的网格质量较好。
- (2) 新方法充分利用了映射法算法简单,

效率高, 生成的网格好等优势, 同时利用了推进波前法几何自适应能力强的优势。

数值实验表明, 本文提出的算法能够针对复杂实体的表面全自动的生成质量较好的混合网格, 且算法效率较高。

## 参考文献

- [1] ZHANG Jianming, QIN Xianyun, HAN Xu. A boundary face method for potential problems in three dimensions[J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 2009, 80: 320-337
- [2] DONG Yunqiao, ZHANG Jianming, XIE Guizhong, et al. A general algorithm for the numerical evaluation of domain integrals in 3D boundary element method for transient heat conduction. Engineering Analysis with

- Boundary Elements, 2015, 51: 30-36.
- [3] SU T, Wang W, LV Z, et al. Rapid Delaunay triangulation for randomly distributed point cloud data using adaptive Hilbert curve[J]. Computers & Graphics, 2015, 54(C):65-74.
- [4] BEDREGAL C, RIVARA M C. New Results on LEPP-delaunay Algorithm for Quality Triangulations[J]. Procedia Engineering, 2015, 124:317-329.
- [5] 覃先云. 边界面法的单元实现及其在复杂结构分析中的应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2012.
- QIN Xianyun. An element implementation of the boundary face method and its application in analysis of complex structures[D]. Changsha. Hunan University, 2012.
- [6] E. Ruiz-Gironés, J. Sarrate. Generation of structured meshes in multiply connected surfaces using submapping[J]. Advances in Engineering Software, 2010, 41: 379-387.
- [7] 李毅, 鲍劲松, 金焯, 等. 二维域多约束四边形有限元网格生成算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(4):488-493.
- (LI Y, BAO Jinsong, JIN hua, et al. Quadrilateral Mesh Generation Algorithm for Planar Domain with Multi-constraints[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(4):488-493. (in Chinese))
- [8] MERHOF D, GROSS R, TREMEL U, et al. Anisotropic quadrilateral meshing generation: an indirect approach[J]. Engineering Computational Technology, 2007, 38(11-12): 860-867.
- [9] 梅中义, 范玉青. 一种用于自动生成二维全四边形有限元网格的改进的铺设算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12 (6): 428-434
- MEI Zhongyi, FAN Yuqing. A modified paving technique for quadrilateral mesh generation in planar regions [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12(6):428-434.
- [10] 郭新强. 边界面法四边形网格生成研究与应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2011.
- GUO Xinqiang. Study on Quadrilateral Mesh Generation for the Boundary Face Method and their Implementation[D]. Changsha. Hunan University, 2011.
- [11] BEAL M W, WALSH J, SHEPHARD M S. Accessing CAD Geometry for Mesh Generation.[J]. International Meshing Roundtable Sandia National Laboratories, 2003:33-42.

#### 作者简介

汪攀, 男, 1987年生, 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室博士研究生, 主要研究方向为有限元网格划分技术, 湖南长沙, 410082。

韩磊, 男, 1988年生, 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室博士研究生, 湖南长沙, 410082。

鞠传明, 男, 1991年生, 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室博士研究生, 湖南长沙, 410082。

池宝涛, 男, 1991年生, 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室博士研究生, 湖南长沙, 410082。

张见明, 男, 1965年生, 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室教授, 博士研究生导师, 湖南长沙, 410082。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11472102)

†通讯联系人, 张见明, E-mail: zhangjm@hnu.edu.cn

★ 如还有未尽事宜, 请联系:

汪攀, 湖南省长沙市岳麓区湖南大学机械与运载工程学院; wangp2007@hnu.edu.cn、电话: 15773181747