

## 边界面法在弹性共形接触问题中的应用

郑兴帅\* 张见明

湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南长沙 41008

Email:chengxi160@126.com

### 摘要

在实际的工程中,经常会遇到大量的接触问题。在机械工程中,汽车车身冲压、机车车轮与钢轨之间、齿轮的啮合、汽车的摩擦制动等都是典型的接触问题。在水利和土木工程中,建筑物基础与地基、混凝土坝分缝两侧、地下洞室衬砌与围岩之间等都存在接触问题。最早对接触问题进行系统研究的是 H. Hertz, 他于 1882 年发表了具有开创性的论文“On the contact of elastic solids”,首次建立了理想接触体之间相互无摩擦接触的公式并解答了相关问题,提出了经典的 Hertz 弹性接触理论。之后的很长时间内,许多学者都致力于研究相关的接触问题的求解方法,但都是只能解决形状简单(如半无限大体、球体等)、接触状态不复杂的接触问题,这些解析的方法在实际工程的应用中受到很大限制。

在过去几十年中,由于数值计算方法有了很大发展,实际工程中相对复杂的接触问题也能够通过数值计算方法得到解决。接触问题的数值方法中使用的数学模型有增量迭代法、Langrange 乘子法、罚函数法和数学规划法等<sup>[1]</sup>。其求解方法主要是有限元法(FEM)和边界元法(BEM)。相比之下,有限元法在弹性接触问题方面的数学理论已经比较成熟,如 MARC、ANSYS、ABAQUS 和 HyperWorks 等现有的一些大型有限元商业软件都可以对实际工程中相对复杂的接触问题进行数值模拟。但是往往需要使用大量的单元和节点来建立接触问题的有限元模型,计算代价很高;实际上,接触问题属于边界条件非线性问题,接触区的边界条件未知,通常需要多次迭代来确定接触区的大小;而边界元法只对求解域的边界进行离散,然后利用边界积分方程来进行接触问题的求解。这样,不需要对域内进行离散,计算规模降低一维;而且,数值计算结果的应力与位移具有同等的精度。有限元法中,应力是由位移通过求导和虎克定理间接求得的,应力的精度比位移低<sup>[2]</sup>。在工程接触问题中,应力往往是重点关注的物理量。

边界面法是张见明等<sup>[4-7]</sup>在边界元法和边界点法的基础之上提出的,该方法仍以边界积分方程为基础;与传统边界元法不同,边界面法的实现是直接基于 CAD 软件系统的边界表征的几何造型数据结构,不论是对边界的数值积分还是对场变量的插值都是在实体边界曲面的二维参数空间里进行,这样可以避免在数值积分时引入几何误差<sup>[6-7]</sup>。

本文利用边界面法分析三维弹性共形接触问题。在共形接触中,由于接触区大小已知,与加载的大小无关,因此,只需要一个全量加载过程<sup>[8]</sup>。三维弹性接触问题的边界积分方程为:

$$\begin{aligned}
& C_{ij}^K(x)u_j^K(x) + \int_{\partial D_{nc}^K} T_{ij}^{*K}(x,y)u_j^K(y)ds_{nc}^K + \int_{\partial D_c^K} T_{ij}^{*K}(x,y)u_j^K(y)ds_c^K \\
&= \int_{\partial D_{nc}^K} U_{ij}^{*K}(x,y)t_j^K(y)ds_{nc}^K + \int_{\partial D_c^K} U_{ij}^{*K}(x,y)t_j^K(y)ds_c^K
\end{aligned}$$

其中,  $K=A,B$  表示主从接触体,  $\partial D_{nc}^K, \partial D_c^K$  分别表示非接触边界和接触边界;

在非接触边界处存在面力边界条件或位移边界条件;而在接触边界上,节点的面力和位移变量均为未知量。因此,需要根据弹性接触和摩擦条件,在接触区的节点处建立补充方程;本文采用形函数法来模拟节点的接触关系,即通过在节点相接触的单元内的形函数插值来建立节点处的接触方程<sup>[3-5]</sup>。以粘着状态为例,

$$\begin{aligned}
u_n^A &= \sum_{i=1}^m U_n^{iB} N^i(\eta, \xi) \\
u_{t1}^A &= \sum_{i=1}^m U_{t1}^{iB} N^i(\eta, \xi) \\
u_{t2}^A &= \sum_{i=1}^m U_{t2}^{iB} N^i(\eta, \xi)
\end{aligned}$$

其中,  $N^i(\eta, \xi)$  为节点接触单元的形函数,  $U_n^{iB}$  为节点接触单元的节点变量;而滑移状态下,切向约束关系失效,此时,利用库伦摩擦定律,由法方向面力和切方向面力的关系建立约束方程。在每一个增量步内,通过多次迭代求解来最终确定接触区大小,同时,将各增量步的节点物理量值相叠加,最终,增量步结束后即得接触问题的计算结果。

## 参考文献

1. 龙述尧编著. 边界单元法概论. 中国科学文化出版社, 2002.
2. 蒲军平. 二维含缺陷弹性体移动和滚动接触的边界元法. [清华大学工学博士学位论文]. 2000.
3. 陈泽军. 三维弹性摩擦接触 Taylor 级数多级边界元法. [燕山大学工学博士学位论文]. 2008.
4. Zhang JM, Qin XY, Han X, Li GY. A boundary face method for potential problems in three dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2009; 80: 320-337.
5. Qin XY, Zhang JM, Guangyao Li, Xiaomin Sheng, et al. An element implementation of the boundary face method for 3D potential problems[J]. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2010;34: 934-943.
6. 覃先云, 张见明, 庄超. 基于参数曲面三维势问题的边界面法, 计算力学学报, 2011; 28: 326-331.
7. 覃先云, 张见明, 李光耀. 边界面法分析三维实体线弹性问题, 固体力学学报, 2011; 32: 1-7.
8. Paris F, Blazquez A, Canas J. Contact problems with nonconforming discretizations using boundary element method. *Computers and Structures*, 1995,829~839.

9. Blazquez A, Paris F, Canas J. Interpretation of the problems found in applying contact conditions in node-to-point schemes with boundary element non-conforming discretizations. *Int J Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1998, 21:361~375.