COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
Global Chinese Workshop in conjunction with 10th National Conference on Computational Methods in Engineering
May 25-28, 2012, Changsha, China

线弹性断裂力学边界元超奇异积分及其处理方法

谢贵重*，张 见明

湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室，湖南长沙 410082
Email: xieguizhong@hnu.edu.cn

摘要

本文在文献[1]提出了一种改进超奇异积分解决方案。和原始的方案进行比较，本文的方法具有以下优点。避免了有关积分上下界的数学推导，易于和自适应细分方案结合，实施起来比较方便。

以边界积分方程为基础的边界元法只需要对边界进行离散，使求解问题域降低一级，便于模拟复杂的几何形状。边界积分方程采用了所分析物理问题的解析基本解，通常具有更高的精度。这种方法对应力变化剧烈的问题比较适合。边界元法在分析裂纹扩展时，仅仅需要调整裂纹面上的节点分布，比有限元更具吸引力。因此，边界元法是断裂力学分析的有效地计算工具。

对于含裂纹的弹性体，传统的边界积分方程是适定的，从数学意义会出现退化。为了克服这种困难，许多学者提出了不少方法。如果含裂纹的弹性体在几何构型及受载方式上具有一定的对称性，子域法边界元可以用来解决裂纹问题。但是这种方法会人为的将边界积分方程扩大很多，并且很少用人用子域法来解决非对称裂纹问题。另外还有双边界元法，COD 方法，Green 函数法。在这些方法中，双边界元法是一个很理想的方法。双边界元在两个裂纹面上上分别采用位移和面力边界积分方程。它不必将含裂纹的弹性体人为地划分为若干个子区域。Portela,Aliabadi 和 Rooke[7-8]详细的介绍了这种方法，并成功将其应用于研究边裂纹的疲劳扩展问题。

用双边界元来解决裂纹问题时，由于裂纹问题刚体位移条件的不适用性，精确地计算奇异积分是实现基于双边界元关键问题。为消去奇异积分中的奇异性，学者们做了很多工作。这些方法的共同想法是基于奇异分离技术，通过增加或抽去奇异核函数来实现[3-5]。这些技术中，局部极坐标展开技术[2]是一种很理想的方法，但是需要数学推导出积分的上下界。文献[2,6-7]提出了一种解决弱奇异积分的变换，这种变换和极坐标比较起来，避免了积分的上下界的推导。在本文中，我们把这种新型变换和局部展开技术结合起来解决奇异积分。

1. 双边界元的积分方程

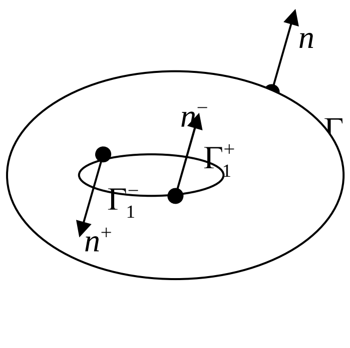

Fig.1

在 Fig.1中，断裂力学位移边界积分方程[7-8]可以表示为

$$c_{lj}u_j(S) = \int_\Gamma u_{lj}^*(S,F)t_j(F)dS(F) - \int_\Gamma t_{lj}^*(S,F)u_j(F)dS(F) - \int_{\Gamma_1^+} t_{lj}^*(S,F)\Delta u_j(F_{\Gamma_1^+})dS(F)$$

$$\Delta u_j(F_{\Gamma_1^+}) = u_j(F_{\Gamma_1^+}) - u_j(F_{\Gamma_1^-})$$

面力边界积分方程可以表示为

$$\frac{1}{2}t_j(S_{\Gamma_1^+}) - \frac{1}{2}t_j(S_{\Gamma_1^-}) = n_l(S_{\Gamma_1^+})\int_{\Gamma+\Gamma_1^++\Gamma_1^-} U_{ljk}^*(S_{\Gamma_1^+},F)t_k(F)dS(F) - n_l(S_{\Gamma_1^+})\int_{\Gamma+\Gamma_1^++\Gamma_1^-} T_{ljk}^*(S_{\Gamma_1^+},F)u_k(F)dS(F)$$

$$S = \Gamma + \Gamma_1^+ + \Gamma_1^-$$

$$u_{lj}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\mu)r}\left[(3-4\mu)\delta_{lj} + r_{,l}r_{,j}\right]$$

$$t_{lj}^* = -\frac{(1-2\mu)\delta_{lj} + 3r_{,l}r_{,j}}{8\pi(1-\mu)r^2}\frac{\partial r}{\partial n(x)} + \frac{(1-2\mu)(r_{,l}n_j(x) - n_l(x)r_{,j})}{8\pi(1-\mu)r^2}$$

$$U_{ljk} = \frac{3r_{,l}r_{,j}r_{,k} + (1-2\mu)(r_{,l}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{lk} - r_{,k}\delta_{lj})}{8\pi(1-\mu)r^2}$$

$$T_{ljk}^* = \frac{G}{4\pi(1-\mu)r^3}\{(1-2\mu)(\delta_{lk}n_j(x) + \delta_{kj}n_l(x) + 3r_jr_ln_k(x)) - (1-4\mu)\delta_{lj}n_k(x)$$

$$+3\mu r_{,k}(r_{,l}n_j(x) + r_jn_l(x)) + 3\frac{\partial r}{\partial n(x)}[(1-2\mu)\delta_{lj}r_{,k} + \mu(\delta_{lk}r_j + \delta_{jk}r_l) - 5r_{,l}r_{,k}r_{,j}]\}$$

在上面的基本解中 $u_{lj}^* \sim O(r)$， $t_{lj}^* \sim O(r^2)$， $U_{ljk} \sim O(r^2)$， $T_{ljk}^* \sim O(r^3)$

参考文献

1. J.M. Zhang, X.Y. Qin, X. Han, G.Y. Li. A boundary face method for potential problems in three dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering 80 (2008) 320-337.
2. Yijun Liu, and T. J. Rudolphi. Some identities for fundamental solutions and their applications to weakly singular boundary element formulations. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1991, 8:301-311.
3. G. Krishnasamy, L. W. Schmerr, T. J. Rudolphi and F. J. Rizzo. Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering. J. Appl. Mech., 1990, 57:404-414.
4. Y. J. Liu, D. Zhang and F. J. Rizzo. Nearly singular and hypersingular integrals in the boundary element method. in: C. A. Brebbia and J. J. Rencis(eds.), Boundary Elements XV, Computational Mechanics Publications, Worcester, MA, 1993, 453–468.
5. X.Y. Qin, J.M. Zhang, G.Y. Li, X.M. Sheng, Q. Song, A finite element implementation of the boundary face method for potential problems in three dimensions, Engineering Analysis with Boundary Element 34 (2010) 934-943.
6. 覃先云、张见明、庄超，基于参数曲面三维势问题的边界面法，计算力学学报，28 (2011) 326-331.
7. Portela A. Aliabadi MH,Rook D P. The dual boundary element method: effective implementationa using boundary element method. Int J Numer Meth Eng, 1991,33: 1269-1287
8. Portela A. Aliabadi MH,Rook D P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation . Int J Comput Struct, 1993,46: 237-247