

## 瞬态传热分析中的域内积分的转化

郭帅平\*, 张见明

湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南长沙 410082

Email: guoshuaiping@hnu.edu.cn

### Abstract

本文首次在 Laplace 空间使用边界法<sup>[1-2]</sup>及多重互易法(MRM)<sup>[3]</sup>求解瞬态传热问题。在 Laplace 空间中, 控制方程变成一个修正 Helmholtz 方程, 并且与时间无关, 其积分形式为:

$$\int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - c \cdot u(Y) - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \int_{\Omega} u^* \cdot b(x, s) d\Omega \quad (1)$$

本文采用了 MRM 将积分方程中的体积分转化为边界积分和非积分项, 如公式(2), 传统的 MRM 使用的是 Laplace 方程的基本解及其高阶形式, 本文使用的高阶基本解是基于修正 Helmholtz 方程的基本解及推导出来的, 高阶基本解拥有较快的收敛速度, 在计算过程中只需截取边界积分无穷级数中的有限项即可很好的近似体积分, 对大部分问题当  $M=3$  即可达到较好的精度, 对于发散的热源函数或者初始温度分布函数, 可以取更多的项保证达到需要的精度。这些高阶基本解与基本解本身只相差一个常数, 使得(2)式右端边界积分项可以化简, 只需计算基本解和域内分布函数及其高阶函数, 使得计算变得更加简单。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^* \cdot b(x) d\Omega &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_{\Gamma} q^{*(j+1)} \cdot b^{(j)} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^{*(j+1)} \cdot b_n^{(j)} d\Gamma \right) - c \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} b^{(j)}(Y) \\ &\approx \int_{\Gamma} q^* \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} b^{(j)} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \cdot \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} b_n^{(j)} d\Gamma - c \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} b^{(j)}(Y) \end{aligned} \quad (2)$$

在求解出 Laplace 空间的数值解后, 我们使用 Gaver-Wynn-rho 公式进行 Laplace 逆变换<sup>[4]</sup>, Gaver 公式是一个纯实数域的逆变换方法, 实现十分简单, 通过运用 Wynn-rho 公式对逆变换进行加速, 使得 Gaver 公式在很少的几步内到达十分理想的计算精度, 由于使用了 Laplace 变换方法, 所以任意计算的时刻的解的精度只和 Laplace 空间中与此相对应的解的精度以及逆变换的精度有关, 所以在时间上, 所有时刻的精度都能保持一致, 而时间域内的大部分方法在计算较小时刻的温度时, 总是很难保证理想的精度。

为验证算法的正确性及计算精度, 本文分析了一个有热源的正方体, 如图 1, 正方体的尺寸为, 扩散系数  $a=1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , 初始温度条件  $0^\circ\text{C}$ , 热源函数为:

$$w(x, y, z) = w_0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L} \sin \frac{\pi z}{L} \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

边界条件为温度为  $0^\circ\text{C}$ 。在这个实例中使用了 150 个线性四边形边界单元和 216 个节点, 本文考察了正方体对角线上的一系列点在不同时刻的温度值, 并将其与精确解进行比较, 如图 1, 同时讨论了 MRM 的计算精度与 M 取值的关系, 在本算例中  $M=3$  即可达到较好的精度, 如图 2. 图中实线表示精确解, 数值结果表明使用 Laplace 变换及新的 MRM 求解含有热源及初始温度分布函数的瞬态传热问题是可行的。

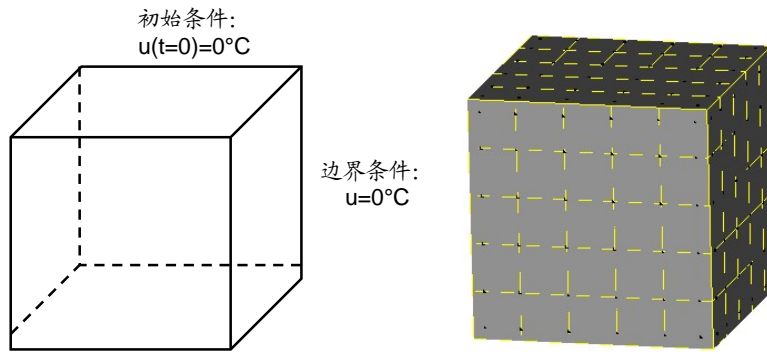


图1: 有热源的正方体及其边界网格

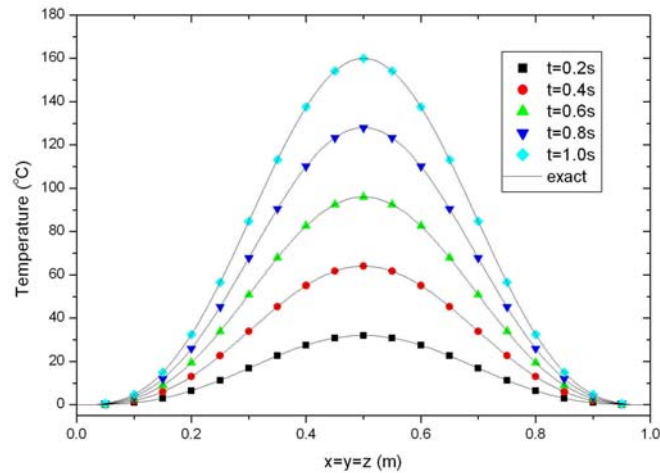


图2: 对角线上的不同时刻温度分布曲线

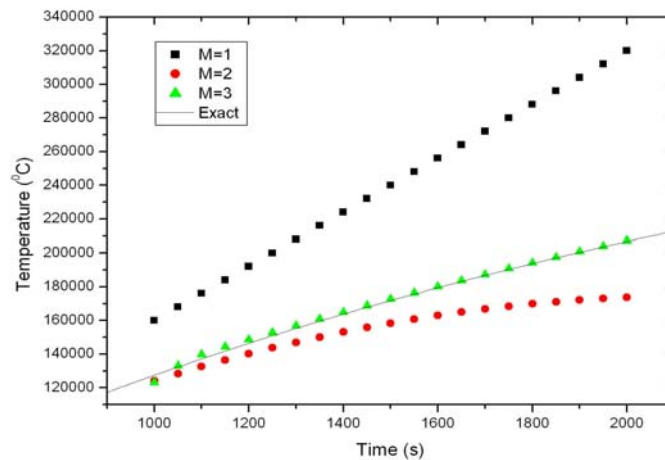


图3: 当M=1,2,3时正方体中点的温度随时间的变化曲线

## REFERENCES

1. J.M. Zhang, X.Y. Qin, X. Han, G.Y. Li. A boundary face method for potential problems in three dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering 80 (2008) 320-337.
2. X.Y. Qin, J.M. Zhang, G.Y. Li, X.M. Sheng, Q. Song, A finite element implementation of the boundary face method for potential problems in three dimensions, Engineering Analysis with Boundary Element 34 (2010) 934-943.
3. Nowak AJ, Neves AC. The multiple reciprocity boundary element method. Springer; 1994 : 45-67.
4. Abate, J. and P. Valkó. Multi - precision Laplace transform inversion. International Journal for Numerical Methods in Engineering 60(5) (2004): 979-993.