COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
Global Chinese Workshop in conjunction with 10th National Conference on Computational Methods in Engineering
May 25-28, 2012, Changsha, China

基于三维弹性屈曲分析的边界面法实现

费柏平*，张见明

湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室，湖南长沙，410082
Email: feibaiping@hnu.edu.cn

摘要

本文利用非线性的几何关系直接基于三维弹性理论导出了增量形式的弹性屈曲微分方程，并应用边界面法(BFM) [1]和双重互易法(DRM)实现了三维弹性屈曲分析。在传统的屈曲分析中，都是基于杆、板、壳等薄型结构的变形假设提出不同类型的屈曲方程，本文试图放弃杆板壳的变形假设，直接基于三维弹性理论导出屈曲方程的一般形式。结构的屈曲实质上是由于存在多种平衡状态，这在数学上表现为微分方程的多解性，揭示出屈曲问题的非线性性质。在变形特点上，屈曲变形多具有小应变大转动的特点，这类问题又被称为有限位移问题[2]，其位移-应变关系不可用小变形假设模拟，而必须采用非线性的几何关系，即格林(Green)应变张量，同时其平衡方程也不能在变形前的位形上建立，而要在屈曲后位形上建立。应用能量驻值原理获得三维弹性屈曲方程的增量形式：

$$[\Delta u_{k,i}\sigma_{ij}^{(0)}+(\delta_{ki}+u_{k,i}^{(0)})\Delta\sigma_{ij}+\Delta u_{k,i}\Delta\sigma_{ij})]_{,j}=0 \quad (1)$$

略去（1）中高阶增量，假设前屈曲状态符合小变形假设，则可略去初位移项，设初应力项中包含一载荷因子 $\overline{p}$ 。假定物理关系是线性的，即满足广义胡克(Hooke)定律，最后方程（1）可简化为：

$$\overline{p}\overline{\sigma}_{ij}^{(0)}u_{k,ij}+(Gu_{k,jj}+(G+\lambda)u_{j,jk})=0 \quad (2)$$

方程（2）即是我要求解的特征屈曲方程。
本文将在边界面法的框架下实现三维实体结构的特征屈曲分析。针对方程（2）的形式特点，采用开尔文(Kelvin)基本解，导出屈曲问题的边界积分方程，

$$\begin{aligned}&c_{ik}(\xi)u_k(\xi)+\int_\Gamma P_{ik}^*(\xi,x)u_k(x)d\Gamma(x)\\&=\int_\Gamma U_{ik}^*(\xi,x)p_k(x)d\Gamma(x)+\overline{p}\int_\Omega U_{ik}^*(\xi,x)\overline{\sigma}_{mn}^{(0)}u_{k,mn}(x)d\Omega(x)\end{aligned} \quad (3)$$

由于开尔文基本解所满足的微分方程并非原问题的方程，导致边界积分方程（3）出现域内积分项，我们将应用双重互易法[3-5]进行处理，将方程（3）中的域内积分项转化到边界上的积分。利用互易原理将方程（3）中的域内积分项转化为：

$$D=\sum_{k=1}^{N+L}a_l^k\hat{u}_{jl}^k(\xi)+\sum_{k=1}^{N+L}a_l^k\int_\Gamma\left(U_{ij}^*\hat{p}_{jl}^k-P_{ij}^*\hat{u}_{jl}^k\right)d\Gamma \quad (4)$$

建立屈曲问题的离散格式，得到用矩阵形式表示的屈曲方程：

$$\mathbf{Hu}-\mathbf{Gp}=\overline{\mathrm{p}}(\mathbf{H\hat{u}}-\mathbf{G\hat{p}})(\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}''\mathbf{F}^{-1})\mathbf{u} \quad (5)$$

引入屈曲问题的增量边界条件，组装成标准的特征值问题的形式：

$$\mathbf{Au}=\overline{\lambda}\mathbf{u} \quad (6)$$

其中 $\overline{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{p}}$ 。最后用奇异值分解（QR）算法求解非对称矩阵 **A** 的特征值及特征向量，得到的特征值的倒数 即为屈曲问题的临界载荷，特征向量是各结点的位移增量，即为对应的屈曲模态。

Numerical Example：

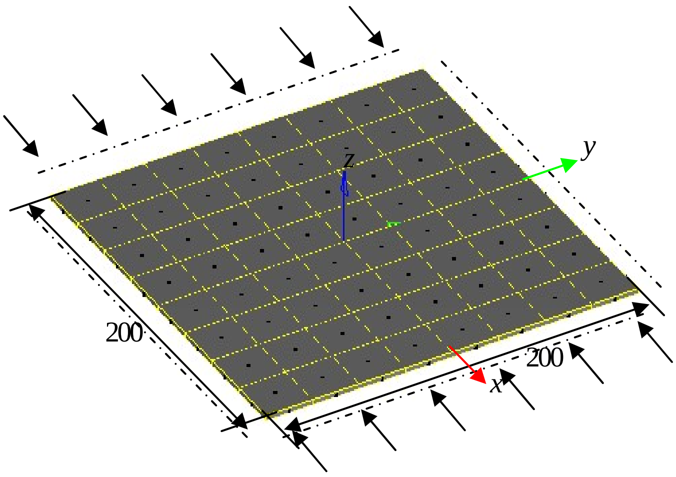

图1：矩形板四边简支对边受压模型

几何参数：矩形板长宽为 200×200 ，厚度 $t=2$。

材料参数：弹性模量 $E=1.0e11$，泊松比 $\nu=0.25$ 。

载荷及约束：为模拟四边简支单向受压矩形板屈曲问题，给定法向沿 x、y 轴的四个面的 z 向位移为 0，法向沿 x 轴的两个对面给定各 1000 帕的面压力。

边界面法结果：

最低临界载荷： $p_{cr}=5.19511\times10^{7}$

相应模态：在四边简支板的模态分析中，求出的位移增量包含三个方向的位移，x，y 方向的位移要比 z 方向的位移小 2 个以上的数量级，因此，z 方向的位移增量是研究薄板屈曲模态主要的量，现在 平面 $z=-1.0$ 上取一定数量的代表性的点，来考查它们在 z 方向的位移增量，如下表所示。

表1：薄板屈曲模态的结点值

坐标值（x, y）	(-75.0, -75.0)	(-25.0, -75.0)	(25.0, -75.0)	(75.0, -75.0)
z向位移	0.035325	0.105942	0.105938	0.035309
坐标值（x, y）	(-75.0, -25.0)	(-25.0, -25.0)	(25.0, -25.0)	(75.0, -25.0)
z向位移	0.105960	0.318158	0.318154	0.105941
坐标值（x, y）	(-75.0, 25.0)	(-25.0, 25.0)	(25.0, 25.0)	(75.0, 25.0)
z向位移	0.105955	0.318158	0.318156	0.105941
坐标值（x, y）	(-75.0, 75.0)	(-25.0, 75.0)	(25.0, 75.0)	(75.0, 75.0)
z向位移	0.035322	0.105943	0.105941	0.035310

有限元法结果：

最低临界载荷： $p_{cr}=5.7397\times10^{7}$ 帕

一阶屈曲模态如下图所示：

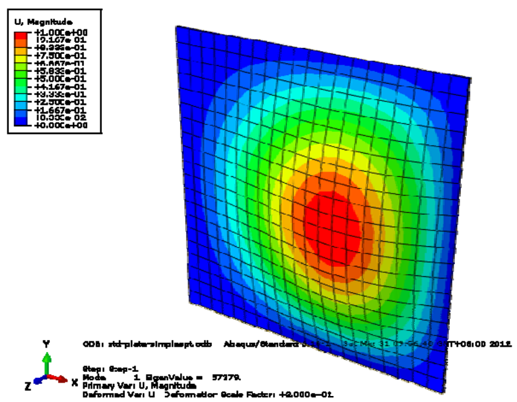

图 2：四边简支板屈曲的有限元法模态解

结论：比较边界面法结果与有限元法结果，临界载荷解二者误差小于 10%，模态解相似，可认为应用边界面法求解基于三维弹性屈曲分析的对薄板屈曲问题可行。

关键词：边界面法；三维弹性屈曲；几何非线性；双重互易法。

参考文献

1. J.M. Zhang, X.Y. Qin, X. Han, G.Y. Li. A boundary face method for potential problems in three dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering 80 (2008) 320-337.
2. 卓家寿. 弹塑性力学中的广义变分原理（第 2 版）[M]. 北京：中国水利水电出版社，2002:127-132.
3. C.A. Brebbia, L.C. Wrobel. The dual reciprocity boundary element method. Computational mechanics publications, Southampton and Elsevier Since; 1992.
4. J. P. Agnantiaris, D. Polyzos, D. E. Beskos. Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM, Computational Mechanics 21 (1998) 372-381.
5. J. Purbolaksono, M.H. Aliabadi. Application of DRBEM for Evaluating Buckling Problems of Perforated Thin Plates, European Journal of Scientific Research ISSN 1450-216X Vol.31 No.3 (2009), pp.398-408.