

# 边界面法数值结果的云图表征

宋 敏, 张见明, 覃先云

(湖南大学汽车车身先进设计与制造国家重点实验室, 湖南 长沙 410008)

**摘 要:** 边界面法继承了传统边界元法的优点, 并将几何实体的边界曲面离散为参数空间里的曲面单元, 在处理一些特殊问题如移动边界、高梯度、大变形等方面显示出特殊的优越性。但是也使得计算结果的后处理遇到困难。提出了一种基于黎曼度量推进波前法生成三角背景网格的实用边界面法计算结果后处理方法。该法对求解域剖分成三角背景网格然后将计算结果映射到网格节点上, 通过区域填充获得计算结果的云图。温度场的数值算例表明该方法可靠实用。

**关 键 词:** 边界面法; 可视化; 推进波前法; 云图

**中图分类号:** TP 391

**文献标识码:** A      **文章编号:** 1003-0158(2011)02-0127-05

## Nephogram Characterization of Boundary Face Method's Numerical Results

SONG Min, ZHANG Jian-ming, QIN Xian-yun

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha Hunan 410008, China)

**Abstract:** The newly developed boundary face method comes into the advantage of the conventional Boundary Element Method, and the boundary faces of the geometry are discretized by patches in parametric space. These constitute advantages over standard mesh-based methods in some special areas such as moving boundaries, large deformation simulation, high gradient problems etc. But they make post-processing of the numerical results an issue which needs additional effort. In this paper, on the basis of the corresponding color of the nodes' numerical values of each background triangle with advancing front technique, a filling method for Nephogram characterization of boundary face method's numerical results is presented and realized by means of OpenGL. It is demonstrated that the proposed approach is feasible and efficient.

**Key words:** boundary face method (BFM); visualization; advancing front technique (AFT); nephogram

收稿日期: 2009-11-20

基金项目: 教育部长江学者与创新团队发展计划资助项目 (531105050037); 湖南大学汽车车身先进设计与制造国家重点实验室自主研究课题资助项目 (60870003); 国家自然科学基金资助项目 (10972074); 国家“863”计划资助项目 (2008AA042507)

作者简介: 宋 敏 (1985-), 男, 湖南醴陵人, 硕士研究生, 主要研究方向为科学计算可视化。

有限元法作为当前应用最为广泛的数值计算方法,在解决集合非线性与材料非线性问题方面发挥着重要作用。但因其固有的网格约束,使得在应用其处理诸如结构大变形、裂纹扩展跟踪、功能材料性能分析、瞬态动力学(如高速碰撞、爆炸)等问题时,常因网格畸变造成计算结果严重失真甚至计算终止<sup>[1-3]</sup>。为此,张见明等在传统边界元法的基础上提出基于参数曲面的边界面法<sup>[4]</sup>。该法不仅继承了边界元法的优良特性,而且仅需要几何实体参数表面的边界表征。从而为克服有限元法固有的缺陷提供新的方法。由于该法没有单元用于边界积分和几何逼近,使得计算结果如应力、应变、位移、温度等的后处理遇到了困难。本文提出在参数空间利用推进波前法对求解域划分三角形背景网格,待求解完成将计算结果赋予给三角形单元节点,最后通过填充算法完成边界面法的后处理云图显示。通过开发基于 VC++ 和 OpenGL 的后处理程序,并给出温度场算例,实例证明了方法和程序的有效性。

## 1 基于参数曲面的边界面法

基于参数曲面的边界面法继承了以边界积分方程为基础的边界元法的许多优点。例如,它只需要对边界进行离散,使求解问题域降低一级,很大程度上简化了分析和计算程序<sup>[4]</sup>;也可以方便地求解无限域和奇异性等问题。同时,该法具有等几何分析的特点。由于基于参数曲面的缘故,所以不论网格离散的粗细,分析几何都是精确的。

边界面法建立在以数学解析表达的参数曲面上,不论是对边界的积分还是对场变量的插值都是在曲面的参数空间里进行。首先,把参数曲面离散成若干个等几何的参数曲面单元。单元节点  $i$  记录的是曲面参数空间的参数坐标值  $(u_i, v_i)$ ,而非三维空间的物理坐标值  $(x_i, y_i, z_i)$ 。参数曲面单元相当于分片曲面(surface patch)。在数值积分过程中,被积函数的几何变量,比如高斯积分点的坐标、雅可比、外法向量是直接通过参数曲面单元中的曲面参数变量计算获得,而不是通过 Lagrange 或 Hermite 插值近似的。在参数空间里,可以通过移动最小二乘法(MLS)<sup>[5]</sup>、非均匀有理 B 样条(NURBS)<sup>[6]</sup>等方法对未知场变量

进行插值逼近。

综上所述,边界面法最大的特点是直接利用 CAD 造型系统中参数曲面的几何信息和在曲面的参数空间内进行边界积分。边界面法的云图显示如果也采用基于像有限元法那样的云图显示方法,那么将使边界面法的结果显示不在原来的几何实体上而出现菱角。为了保持一致,本文在参数空间划分背景网格和进行等值线填充区域的搜索,然后将参数空间的数据转化到三维空间并对等值线区域填充对应的颜色。

## 2 参数曲面的三角背景网格生成

本文利用基于黎曼度量的改进推进波前法<sup>[7]</sup>,在参数曲面参数域上生成三角背景网格。该法可以在不同的平面和曲面上划分网格,并且可以生成自适应网格便于精确等值点的搜索。在网格剖分的过程中同时考虑了用于生成自适应网格的三维黎曼度量和参数曲面自身的黎曼度量,既可以生成大小一致的网格,也可以根据用户的指定或计算得到的空间各点的用于控制网格生成尺寸和方向的黎曼度量来生成自适应曲面网格。该法通过 4 个步骤完成:

(1) 取得实体各曲面的边界曲线;

(2) 根据控制度量对各曲面边界曲线进行离散化,离散化的过程中满足左手规则,离散后将离散点投影到曲面的参数空间;

(3) 对每个曲面在参数空间进行剖分,并把剖分结果反向投影到曲面的物理空间,形成各个曲面的表面网格;

(4) 把同一实体上的各个曲面的网格进行合并形成该实体的整个表面的网格。

运用该方法,立方体和圆柱面划分完成后的结果如图 1 所示。

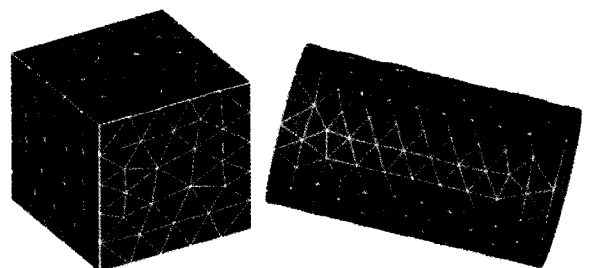


图 1 推进波前法网格图(立方体与圆柱面)

### 3 边界面法计算结果的云图显示方法

数值计算结果的显示实质是标量场的可视化, 常用的标量场可视化方法有等值线、彩色云图<sup>[8-9]</sup>。本文采用彩色云图表示边界面法的计算结果, 颜色显示采用 RGB 颜色模型。为了与边界面法基于几何的优点保持一致, 文中等值线的条数确定、等值点的计算、填充区域的确定及对应颜色的确定均在参数空间进行, 而等值线的绘制与填充显示则转化到三维空间完成。具体算法如下:

#### 3.1 网格内等值线条数的确定

根据背景网格节点物理值, 计算出将背景网格划分成相同颜色参数的小区域所需的等值线条数, 然后在计算每一条等值线所对应的物理场数值。假设在整个区域上的物理值对应的颜色定义为  $L$  种, 那么任意三角背景网格内等值线条数的计算如公式(1)

$$IsoNum^g = \frac{(V_{max}^g - V_{min}^g)}{V_{max} - V_{min}} \times L \quad (1)$$

式中  $IsoNum^g$  表示三角背景网格内等值线的条数,  $V_{max}$ ,  $V_{min}$  和  $V_{max}^g$ ,  $V_{min}^g$  分别表示整个求解域内和网格内物理值的最大和最小值。从而可以推出任意单元内, 由低到高的各等值线物理值的数值计算如公式(2)

$$V_i^g = V_{min}^g + \frac{V_{max}^g - V_{min}^g}{IsoNum^g} \times i, (i=1, 2, \dots, IsoNum^g) \quad (2)$$

可以看出, 这些等值线将三角网格划分成

$IsoNum^g - 1$  个小区域, 并且每一个小区域内的物理场数值都对应相同的颜色。

#### 3.2 网格内等值线的绘制

以任意一个三角网格为研究对象, 首先由公式(1)求出当前背景网格内的含有等值线的条数  $IsoNum^g$ ; 然后根据公式(2)求出当前网格的等值线物理值数值  $V_i^g$ ; 接着对网格各边进行循环, 由公式(3)求出  $V_i^g$  对应的各个等值点; 最后将当前网格中同一条等值线的等值点连接起来并赋予颜色属性。对整个求解区域所有背景网格进行遍历, 最终绘制成等值线图

$$\begin{aligned} X_c &= X_i + \frac{X_j - X_i}{V_j - V_i} \times (V_c - V_i) \\ Y_c &= Y_i + \frac{Y_j - Y_i}{V_j - V_i} \times (V_c - V_i) \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $V_c$ 、 $V_i$ 、 $V_j$  分别表示等值线值和网格边上两个端点所对应的物理值,  $X_i$ 、 $Y_i$ ,  $X_j$ 、 $Y_j$  和  $X_c$ 、 $Y_c$  分别表示网格边上两 endpoint 及等值点的参数坐标。

#### 3.3 网格内等值线间的填充

根据三角背景网格内物理场数值, 计算得到所要填充的颜色参数; 再通过参数空间转化为三维空间对该网格进行颜色填充。将三角网格三个网格节点的物理值由大到小排列, 其排列顺序为  $V_i \geq V_j \geq V_k$ 。于是, 在三角网格内的等值线之间进行区域填充时, 由等值线和三角形节点之间的物理场数值大小关系不同而形成填充区域有三角形、四边形和五边形。具体可表示成如图 2 所示。

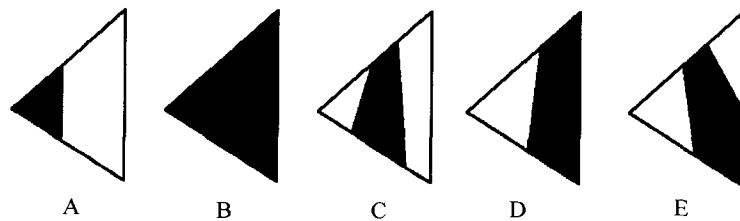


图 2 三角背景网格填充区域类型图

对于 A、B 两类三角形区域填充, 只需找出围成该区域的三点坐标, 按照逆时针顺序排列即可完成填充区域的确定。C 类四边形区域填充的

四个顶点均为等值点, 而 D 类四边形区域填充包括等值点与节点, 因此四边形区域填充不仅要保证填充区域的顶点按照逆时针顺序, 而且还要保

证各个顶点的参数坐标转化三维坐标时，围成的四边形仍为凸多边形才能完成颜色填充。E 类五边形区域填充要求同 C、D 类四边形区域填充要求。倘若在参数空间中 C、D、E 类多边形在参数空间为凸多边形，而在三维空间填充却出现重复填充的区域，该怎么办呢？本文中采用简单多边形凸单元剖分算法<sup>[10-11]</sup>。该算法在参数曲面上将 C、D、E 类简单多边形剖分成彼此不包含的三角形区域，然后转化成三维空间进行颜色填充。

### 3.4 物理场数值与颜色对应的关系

云图的绘制的最后的关键就是定义好物理场量值与颜色的对应关系，它决定了最后显示的效果。在窗口系统最为常用的方法就是运用 RGB 模型。由红绿蓝的系数来定义一种颜色的参数，然后与指定的物理量值对应起来。为了获得光滑的云图就需要定义足够多的颜色种类使得整个求解区域的颜色光滑过度。反之定义颜色种类不多，将使整个求解区域的云图由条状的颜色带组成。但是，颜色种类少可以减少程序的时间消耗，在效率与美观之间需要取一个合适的颜色种类数。本文参照有限元商业软件以及其他后处理专业软件，取颜色种类数为 12 种。

## 4 边界面法云图实例及算法分析

本文利用 OpenGL 中的填充 Polygon 函数实现区域的颜色填充<sup>[12]</sup>。结合 VC++ 和 OpenGL 开发出边界面法后处理软件。以肘形弯管的稳态温度场为例来评估当前的方法。肘形弯管的几何尺寸如图 3 所示，设该弯管的热传导系数为  $\lambda = 1.0 (\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C})$ ，同时假设表面温度边界条件为  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3yx^2 - 3xz^2 - 3zy^2$ 。

(1) 已知条件读入边界面法求解器，待求解完成后，将计算结果中的热流密度  $Q_z$  进行云图显示，如图 4 所示。图中直观地显示出热流密度  $Q_z$  在弯管表面的分布情况，达到预期的显示效果。以此同时，该云图可以进行任意的移动、缩放、旋转等操作，无需进行重新搜索填充区域即可完成显示。因此，本文所提出的方法不仅填充效果贴合几何实体，而且能够实时显示。

(2) 该算法除应用于新的数值方法外，同时与传统方法相比具有以下优势：

1) 不用分等值线是否为边界等值线还是内部等值线（传统算法要分边界网格和内部网格，以寻找等值线的起点及区分等值线是闭合还是开曲线）。

2) 不用判断网格是否使用或未使用（传统算法要将追踪过的网格进行标识，在追踪下一条等值线时避免重复）。

3) 不用判断等值点是网格的入点还是出点（传统算法要判断等值点是这个网格的入出点，以追踪下一个网格）。

4) 本算法无需按照一定顺序进行填充区域的搜索，程序结构简单，运行效率获得提高。

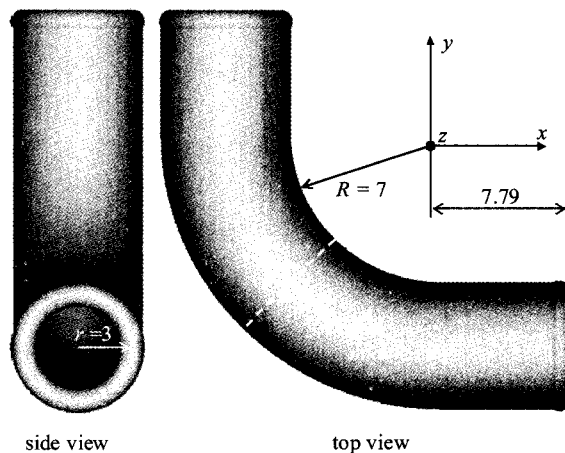


图 3 肘形弯管尺寸示意图

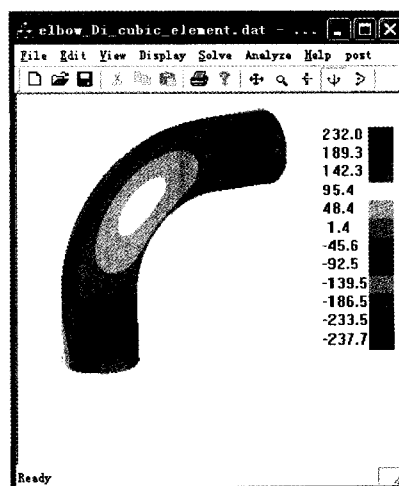


图 4 肘形弯管热流密度  $Q_z$  云图

## 5 结束语

本文提出一种在基于黎曼度量的推进波前

法生成三角背景网格的基础上, 实现边界面法计算结果云图显示的方法。该法将边界面法计算结果赋予到三角网格的节点上, 然后映射插值得到求解域中三角网格的云图颜色。给出算例表明这种方法能够适用于平面和曲面的显示, 因而具有广泛的适用性; 与此同时验证了方法的可靠性。

### 参 考 文 献

- [1] 宋康祖, 陆明万, 张 雄. 固体力学中的无网格方法[J]. 力学进展, 2000, 30(1): 55-56.
- [2] 周小平, 周瑞忠. 无单元法研究现状及展望[J]. 工程力学, 2005, 21(1): 12-20.
- [3] 张 雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 730-742.
- [4] Zhang Jianming, Qin Xianyun, Han Xu, et al. A boundary face method for potential problems in three dimensions [J]. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 2009, (80): 320-337.
- [5] [英] Brebbia C A 等著. 边界单元理论和工程应用[M]. 龙述尧, 刘腾喜, 等译. 长沙: 国防工业出版社, 1988. 132-175.
- [6] Amit Shaw, Roy D. NURBS-based parametric mesh-free methods [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(17-18): 1541-1567.
- [7] 关振群, 单菊林, 顾元宪. 基于黎曼度量的复杂参数曲面有限元网格生成方法[J]. 计算机学报, 2006, 29(10): 1823-1833.
- [8] 孙家广, 杨长贵. 计算机图形学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998. 178-187.
- [9] 孙晓燕, 伍增贵. 基于 MFC 和 OpenGL 的快速填充等值线实现[J]. 计算机应用研究, 2005, 3(02): 169-172.
- [10] 魏 东, 朱功勤. 任意多边形顶点凸、凹性判定的一种算法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2006, 29(3): 373-375.
- [11] 高 翔, 高中山. 简单多边形凸单元剖分算法的设计及实现[J]. 燕山大学学报, 2005, 29(6): 506-510.
- [12] [美]OpenGL 体系结构审核委员会, Dave Shreiner, Mason Woo, Jackie Neider 等著. OpenGL 编程指南(第 4 版)[M]. 邓郑祥译. 北京: 人民邮电出版社, 2005. 19-197.