

边界面法分析三维实体线弹性问题*

覃先云 张见明** 李光耀 张 正

(湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室,长沙,410082)

摘 要 论文利用以边界积分方程为理论基础的边界面法分析三维实体的线弹性问题. 在该方法中, 边界积分和场变量插值都是在实体边界曲面的参数空间里进行. 积分点的几何数据, 如坐标、雅可比、外法向量都是直接由曲面算得, 而不是通过单元插值近似, 从而避免了几何误差. 另外, 该方法的实现是直接基于 CAD 模型中的边界表征数据结构, 可以做到与 CAD 系统无缝集成. 在分析中, 避免对结构作几何上的简化, 结构的所有局部细节都按照实际形状尺寸作为三维实体处理. 应用实例表明, 论文方法可以简单有效地模拟具有细小特征的复杂结构, 可以直接基于三维弹性理论求解薄型壳体结构, 可以获得比有限元法更精确的计算结果.

关键词 边界积分方程, 边界面法, CAD 模型, 三维线弹性问题

0 引言

在结构设计分析中, 通常以不同的方式表示 CAD 和 CAE 模型, 前者是连续的参数模型, 而后者是离散的网格模型. CAE 模型是利用网格生成器在 CAD 模型基础上生成的, 并利用网格近似原始的 CAD 几何. 对复杂结构, 模型转化是一件费时、费力的事, 并且容易出错. CAE 分析所用的几何数据是基于网格单元通过分段多相式插值近似的, 当网格稀疏时, 会产生明显的几何误差. 几何误差从根本上会导致计算精度降低, 甚至对有些计算结果起着决定性的影响^[1-2]. 在自适应分析中, 需要反复地与 CAD 系统进行交互, 而每个阶段的交互是很复杂的. 两者模型的分离, 使几何造型和结构分析成为两个互相独立的过程, 不便于反复修改和测试设计变量^[1-2].

为了克服上述的缺点, Hughes T J R 等^[1,2]提出了基于非均匀有理 B 样条 (NURBS) 的等几何分析方法, 直接在原始 CAD 几何上对结构进行分析, 并取得了极有价值的成果. Wang L^[3]通过几何细分方法使边界元法 (BEM) 与 CAD 几何融合一体. 张见明等^[4-6]在边界元法^[7]和边界点法^[8,9]的基础上提出了边界面法 (BFM), 该方法的实现是直接基于边

界表征的几何造型数据结构, 可以做到与 CAD 系统无缝集成. 该方法继承了以边界积分方程为基础的边界类型方法的许多优良特点. 例如, 它只需要对边界进行离散, 使求解问题域降低一级, 很大程度上简化了网格生成过程; 也可以方便地求解无限域和奇异性等问题. 重要的是, 这种方法具有等几何分析的特点. 例如, 不管以多么粗糙的网格离散, 分析几何是精确的; 在自适应网格细分过程中, 不需要再与 CAD 系统进行反复地交互, 使自适应分析变得简单; 计算结果精度高, 在分析弹性问题时应力与位移具有同等精度.

在边界面法, 不论是对边界的数值积分还是对场变量的插值都是在边界曲面的二维参数空间里进行^[4-6]. 该方法需要将每个参数曲面离散成若干个参数曲面单元. 每个单元定义在所在曲面的二维参数空间, 而非三维物理空间. 这种曲面单元相当于分片曲面 (surface patch), 保持了曲面的原始几何信息. 在数值积分过程中, 被积函数的几何变量, 比如高斯积分点的坐标、雅可比、外法向量是直接通过曲面单元中的曲面参数变量计算获得, 而不是通过分段多项式插值近似的.

边界面法已成功地运用于分析三维位势问题, 并且显示了其独特的优点. 本文将该方法运用于分析三维线性弹性问题. 在分析中, 不对实体结构进行

* 国家 973 项目 (2010CB328005), 国家自然科学基金项目 (10972074) 和湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题 (60870003) 资助.

2010-06-04 收到第 1 稿, 2010-11-24 收到修改稿.

** 通讯作者. Tel: 0731-88823061, E-mail: zhangjianm@gmail.com.

简化,直接根据其三维 CAD 模型的边界表征数据结构对实体边界进行离散,离散网格保留了原始实体的几何信息. 实体中的几何细小特征,如机械结构中的倒角、焊缝、退刀槽等,都按照实际形状尺寸作为三维实体处理. 对细长、薄型结构,不采用抽象的一维、二维单元,也直接作为三维实体来处理. 文中,首先给出三维线弹性问题的边界积分方程,并基于离散方程讨论边界面法求解弹性问题的特点. 然后,利用边界面法求解薄型壳体结构和具有细小圆角的复杂结构,并且取得了极有价值的结果.

1 边界积分方程及其离散格式

不计体力,三维线弹性问题的正则边界积分方程为^[10]:

$$0 = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(P, Q) t_k(P) d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} t_{ik}^*(P, Q) [u_k(P) - u_k(Q)] d\Gamma(P), \quad \forall Q \in \Gamma \quad (1)$$

式中 u_k 和 t_k 分别位移和面力, P, Q 分别为场点和源点, Γ 为求解域边界; u_{ik}^* 、 t_{ik}^* 分别为位移和面力基本解(Kelvin's solution),其公式为:

$$\begin{cases} u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}] \\ t_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,i}n_k - r_{,k}n_i) \right\} \end{cases} \quad (2)$$

$(l, k=1, 2, 3)$

式中 G, ν 分别为剪切模量和泊松比, n 为场点 P 在边界上的单位外法向量,其分量为 $n_i (i=1, 2, 3)$, r 为 P, Q 两点间的欧氏空间距离. 方程(1)是传统边界积分方程的弱奇异形式,在该离散方程中不需要计算奇异积分^[10].

用边界面法求解边界积分方程(1)时,需要将求解域边界离散成若干个(N_E)边界单元 Γ_j 和相应的 N 个节点. 将边界上位移和面力分别表示为 N 个节点的值插函数为:

$$u_k = \sum_{i=1}^N \Phi_i \hat{u}_k^i, \quad t_k = \sum_{i=1}^N \Phi_i \hat{t}_k^i \quad (3)$$

式中 Φ_i 为形函数.

将边界离散后,将式(3)代入式(1),可以把式(1)的边界积分方程离散为关于 N 个节点 $3N$ 个未知量的方程,即:

$$0 = \sum_{m=1}^{N_E} \int_{\Gamma_m} u_{ik}^*(P, Q) \sum_{i=1}^N \Phi_i(P) \hat{t}_k^i d\Gamma(P) -$$

$$\sum_{m=1}^{N_E} \int_{\Gamma_m} t_{ik}^*(P, Q) \left\{ \sum_{i=1}^N \Phi_i(P) \hat{u}_k^i - \sum_{i=1}^N \Phi_i(Q) \hat{u}_k^i \right\} d\Gamma(P) \quad (4)$$

方程(4)组装成矩阵形式为:

$$H\hat{u} - G\hat{t} = 0 \quad (5)$$

求解方程(5),就可以得到所有节点上未知量的位移和面力值. 根据节点上的值,相应地可以求得边界上和域内任意一点的位移和应力^[7,10].

在离散方程中,虽然将边界离散为单元,但每个单元定义在曲面的参数空间,参数单元保持了曲面的原始几何数据. 每个单元里的计算几何变量直接由相应的曲面参数变量计算得到,避免了由单元节点值插值近似. 在传统边界元法中,几何变量和未知场变量都通过分段多项式插值近似,在边界面法里只对场变量进行插值,且插值在曲面的参数空间里进行. 对边界面法,边界积分和变量插值都直接在以边界表征的 CAD 实体边界曲面的参数空间里进行,这是区别于传统边界元法的本质特点. 由方程(4)可知,数值计算结果的应力与位移具有同等的精度,而在有限元法计算结果的应力精度比位移精度低一阶^[7]. 方程(4)中的基本解是精确满足问题区域内部的微分方程,只是在边界上对变量采用近似模拟,在内部不存在近似. 而在有限元法中,在每个单元上不仅对变量作了近似,而且几何形状进行了近似模拟,因此增加了有限元的“刚性”,这与实际不尽一致,影响了计算精度^[7]. 因此,基于边界积分方程的边界面法在分析结构应力方面比有限元法有明显的优势.

在曲面参数空间里离散,不但使参数网格保持了精确的几何信息,而且可以有效地离散较复杂的曲面模拟复杂结构. 如图 1 所示碳纳米复合材料模型,该结构为张见明等在做纳米复合材料研究中的代表模型^[11]. 该结构中所有复杂纳米体元的边界直接在其对应的曲面参数空间离散,精确而且有效地模拟了这种复杂结构. 对这种复杂结构,在有限元法中很难得到合适的体网格离散,同样对边界元法也需要高质量的边界单元来模拟复杂边界.

在曲面参数空间里,可以利用移动最小二乘法(MLS)^[9]、非均匀有理 B 样条(NURBS)^[12]、分段多项式^[5]等方法对未知变量进行插值逼近. 如果利用 MLS 等无网格法中的变量逼近方法时,边界面法具有像边界点法、杂交边界点法等无网格法^[8,9]的特点,曲面单元仅作为背景积分单元. 如果利用分段多

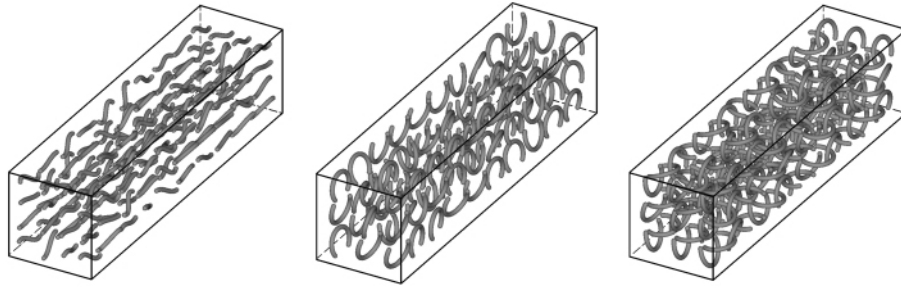


图 1 碳纳米复合材料模型

Fig. 1 The model of carbon nanotubes based composites

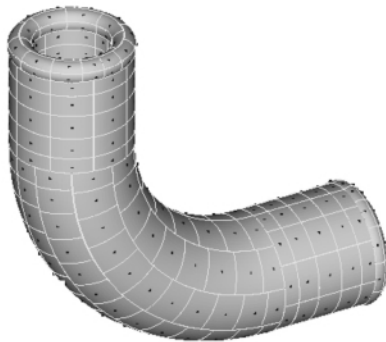
相式插值,边界面法具有基于网格插值边界元法的特点,可以更有效地处理具有任意裁剪和细小特征结构的实体问题.在该法的程序实现框架中,建立了统一的实现不同插值方法的数据结构,从而可以根据不同的结构采用合适的插值方式,使边界面法的实现灵活自由.如图 2(a)所示肘形弯管^[4],其表面的边界变量利用 MLS 进行逼近,图中的曲面参数单元作为背景积分单元,每个背景单元里的中心点为 MLS 插值点.在图 2(b)中,利用分段多相式插值

具有细小孔平面上的未知变量,在曲面的边界上采用非连续单元,而在内部利用连续单元^[5,6].这种单元的分布方式有利于灵活离散实体边界,可以采用不同密度的网格有效地离散复杂结构.在离散的边界积分方程中,不要求插值形函数的连续性,因此在边界面法采用非连续单元是满足理论要求的,而在有限元法中是不可行的.

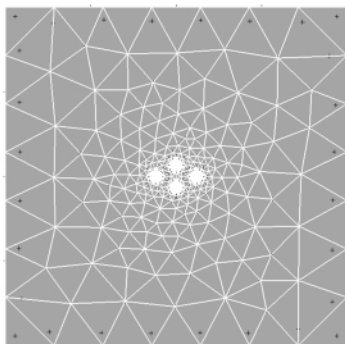
2 应用实例与讨论

2.1 薄型圆柱壳体问题

薄型圆柱壳体的几何结构和尺寸如图 3 所示,圆柱的厚度为 0.02,其半径与厚度的比为 100.圆柱两端固定,内部承受大小为 10 的均布压力,材料的弹性模量为 1800,泊松比为 0.25.两端固定使圆柱的端面附近产生边界层效益,利用有限元法很难模拟这种现象.基于壳理论,该问题的径向位移精确



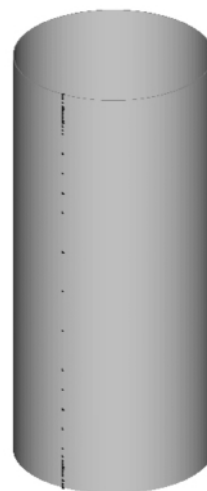
(a) 利用MLS逼近
(a) Approximated by MLS



(b) 利用多项式插值
(b) Interpolated by polynomial

图 2 边界变量

Fig. 2 Boundary variables



中性面半径: $R=2.0$
 圆柱厚度: $t=0.02$
 圆柱高度: $L=10.0$
 R 与 t 比值: 100

图 3 薄型圆柱壳体结构和计算点分布

Fig. 3 Thin cylindrical shell structure and evaluation points

解为^[1]：

$$u(x) = -\frac{PR^2}{Et} [1 - C_1 \sin(\beta x) \sinh(\beta x) - C_2 \cos(\beta x) \cosh(\beta x)], \quad x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \quad (6)$$

式中：

$$C_1 = \frac{\sin\alpha \cosh\alpha - \cos\alpha \sinh\alpha}{\sinh\alpha \cosh\alpha + \sin\alpha \cos\alpha} \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{\cos\alpha \sinh\alpha + \sin\alpha \cosh\alpha}{\sinh\alpha \cosh\alpha + \sin\alpha \cos\alpha} \quad (8)$$

$$\beta = \left(\frac{Et}{4R^2 D}\right)^{1/4}, \quad \alpha = \frac{\beta L}{2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^3)} \quad (9)$$

尽管该壳体结构非常薄,在利用边界面法分析

时,没有根据壳体理论采用抽象单元,而是直接基于三维实体弹性理论进行分析.壳体的边界离散如图 4 所示,参数曲面单元和节点数分别为 510、1648.在圆柱面端面附近采用较密的网格,为有利地计算端面处的边界层现象.在圆柱面上采用二次单元,而在较薄的端面上利用线性单元.图 4 显示了端面网格的分布模式,沿径向方向只分布 1 个单元,沿圆周方向分布 8 个单元.由于这些单元是定义在端面的参数空间,较少的单元就能精确的模拟端面几何,而有限元法就很难精确模拟这种特征.

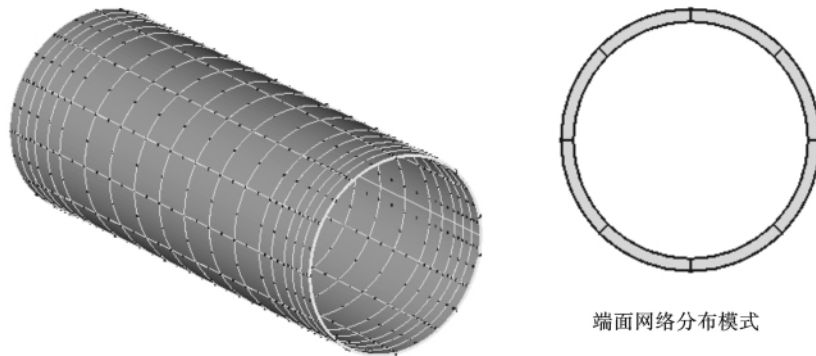


图 4 薄型圆柱壳体边界网格

Fig. 4 Thin cylindrical shell boundary mesh

计算点分布在两端点为(-2.01, 0.0, -4.99)、(-2.01, 0.0, 4.99)的直线上,如图 3 所示.利用边界面法获得计算点的径向位移如图 5 所示,可以看出边界面法计算结果拟合的曲线与精确解很相近,并且在端面处体现了位移边界层现象.图 6 显示了沿计算点所在直线上 von Mises 应力分布趋势,很

好地表现了端面附近的应力边界层现象.有限元法的应力计算精度低,其计算结果很难体现这种应力集中现象.

该实例说明了边界面法基于三维弹性理论成功地分析了薄型壳体结构.利用该方法分析薄型结构,数值计算时会产生大量的近奇异积分^[13].能否有效

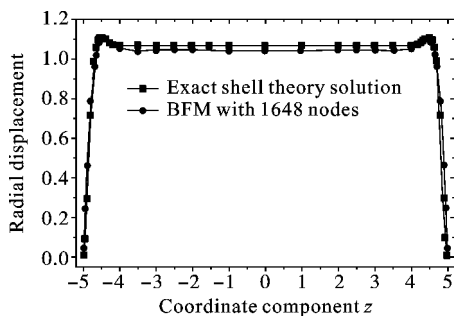


图 5 薄型圆柱壳体计算点径向位移

Fig. 5 Radial displacement of evaluation points for thin cylindrical shell

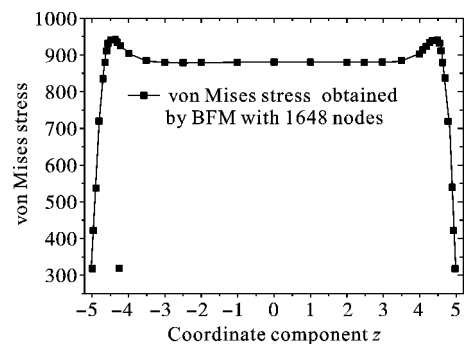


图 6 薄型圆柱壳体计算点 von Mises 应力

Fig. 6 von Mises stress of evaluation points for thin cylindrical shell

地计算近奇异积分是分析成败的关键所在. 本文采用参考文献[9]中的处理近奇异积分技术较精确地计算了近奇异积分.

2.2 三通体混合边界值问题

利用边界面法分析具有细小倒圆角的三通体混合边界值问题, 并与有限元法进行比较. 该实体 CAD 几何结构和边界条件如图 7 所示, 在 $face_A$ 面上约束沿坐标 x, y, z 方向的位移, 在 $face_B$ 面上施加大小为 500 N/mm^2 均布拉力. 材料的弹性模量为 100000 MPa , 泊松比为 0.25 , 不计重力.

利用边界面法和有限元法根据不同的离散方案计算该问题, 并比较 42 个给定计算点的沿坐标 y 方向位移和 von Mises 应力值. 计算点为图 7 所示, 均匀分布在倒圆角曲面上. 有限元法分析是利用成熟的商业有限元软件 MSC. Patran/Nastran 完成的. 边界面法分析利用的两种离散方案, 其单元数都为 2486. 其中一种方案在倒圆角面上采用二次单元, 其余处为线性单元, 而另一种方案都采用线性单元. 有限元法一种方案利用的线性四面体单元和节点数分别为 321153、60444, 另一种方案利用的二次四面体单元和节点数分别为 36702、56030. 图 8 显示了其中的两种离散方案, (a) 为边界面法边界离散模型, 其边界单元和节点数分别为 2486、1782; (b) 为有限元法体离散模型, 其体单元和节点数分别为 321153、60444.

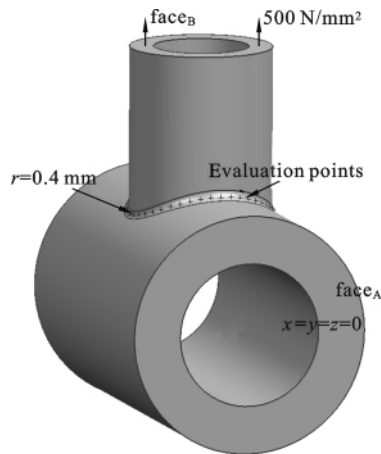


图 7 三通体边界条件和计算点分布
Fig. 7 Boundary conditions and evaluation points for the solid with three holes

图 9(a)和 9(b)分别显示了图 8 中边界面法和有限元法模型中倒圆角处的局部网格. 可以明显地

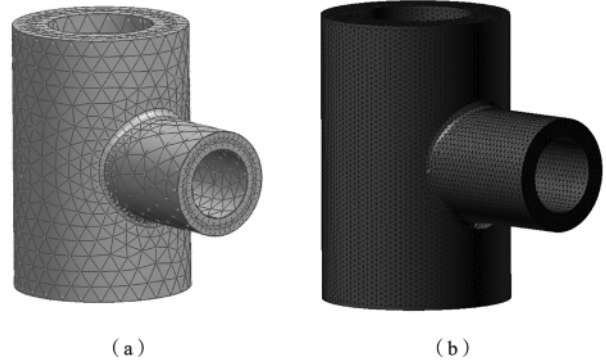


图 8 (a) BFM 边界离散(1782 节点)
(b) FEM 体离散(60444 节点)

Fig. 8 (a) Boundary discretization for BFM (1782 nodes);
(b) Domain discretization for FEM (60444 nodes)

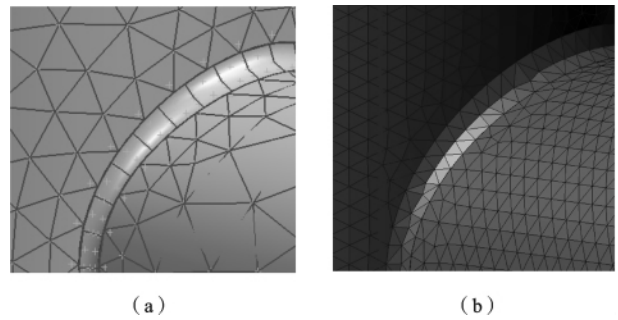


图 9 (a) BFM 圆角处局部网格
(b) FEM 圆角处局部网格

Fig. 9 (a) Local mesh of the filleted corner for BFM;
(b) Local mesh of filleted corner for FEM

看出, 图 9(a)曲面网格精确地模拟了细小圆角, 而图 9(b)利用体网格近似模型具有明显的几何误差. 边界面法的网格定义在曲面的参数空间, 可以很方便精确地模拟圆角等细小几何特征. 有限元法的网格定义在三维物理空间, 需要较精细的网格才能模拟细小几何特征. 用精细的网格会明显增加有限元的计算规模, 通常将细小特征忽略, 而细小特征往往是应力集中的地方. 在该实例中的倒圆角处就是应力集中部位, 不能忽略.

各种方案分析结果的沿 y 方向位移分量和 von Mises 应力分别如图 10、11 所示. 从图 10 看出 BFM 和 FEM 计算结果的沿 y 方向位移分量曲线基本重合, 说明 BFM 和 FEM 在计算位移时都具有很好的精度. 从图 11 表可以看出 BFM 倒圆角处的应力计算结果曲线对称且相对光滑(由于结构和边界条件的对称性, 倒圆角处的应力分布是对称的), 而 FEM

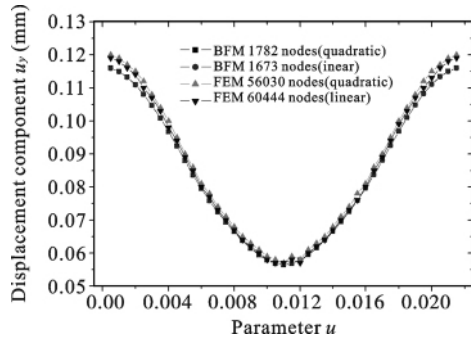
图 10 计算点沿坐标 y 方向位移分量比较

Fig. 10 Comparison of displacement component in z coordinate axis of evaluation points

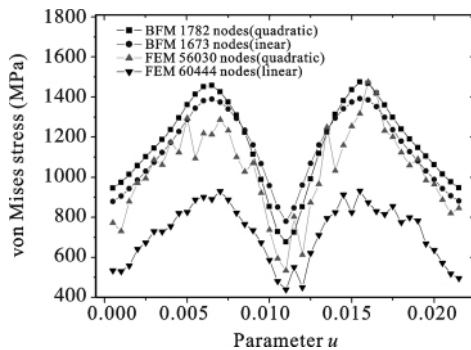


图 11 计算点 von Mises 应力比较

Fig. 11 Comparison of von Mises stress of evaluation points

应力曲线不太对称且波动很大. 在节点数量相当的情况下, BFM 用线性单元计算值与二次单元(只在倒圆角曲面上用二次单元)计算结果相差不大, 而 FEM 用线性单元计算值与二次单元计算结果相差较大. FEM 利用二次单元计算的应力与 BFM 计算结果相近. 实例说明了 BFM 计算应力结果更能反映真实情况, 并且计算结果稳定可靠. BFM 用相对较少节点数的计算结果比用较多节点数的 FEM 计算结果好, 这说明了 BFM 在结构应力分析方面明显优于 FEM.

3 总结

本文利用边界面法分析三维实体的线弹性问题. 该方法是以边界积分方程为理论基础的, 只需要求解域的边界离散, 计算精度高, 在分析弹性问题时应力与位移具有同等的精度. 边界面法的实现是直接基于 CAD 造型中的边界表征数据结构, 可以做

到与 CAD 系统的无缝集成, 可以避免计算几何误差. 只需要 CAD 实体边界曲面的参数离散, 边界积分和变量插值都直接在曲面的参数空间里进行. 在分析线弹性问题时, 不对实体做几何上的简化, 所有结构(包括细长和薄型结构), 从整体到局部细节都按照实际形状尺寸作为三维实体处理.

在分析薄型圆柱壳体时, 计算结果的径向位移和 von Mises 应力都能明显地反映边界层现象. 该实例说明了本文方法可以直接基于三维弹性理论有效地求解壳体结构. 分析具有细小圆角的三通体时, 边界面法与有限元法进行了比较, 其结果说明了边界面法可以用较少曲面单元就能获得需要用较多体单元有限元法计算结果的同等位移精度, 并且应力精度还比有限元法高. 该实例也说明了边界面法可以简单精确地模拟具有细小特征的复杂结构. 后续的工作是将边界面法与多域算法、快速算法相结合^[14], 以求解任意复杂几何形状、任意材料构成的大规模复杂工程问题.

参考文献

- [1] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis; CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods on Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 4135-4195.
- [2] Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, Evans J A, Hughes T J R. Isogeometric analysis using T-splines[J]. Computer Methods on Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199: 229-263.
- [3] Wang L. Integration of CAD and boundary element analysis through subdivision methods[J]. Computers & Industrial Engineering, 2009, 57(3): 691-698.
- [4] Zhang J M, Qin X Y, Han X, Li G Y. A boundary face method for potential problems in three dimensions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 80: 320-337.
- [5] Qin X Y, Zhang J M, Li G Y, Sheng X M, Song Q, Mu D H. An element implementation of the boundary face method for 3D potential problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2010, 34: 934-943.
- [6] 覃先云, 张见明, 庄超. 基于参数曲面三维势问题的边界面法[J]. 计算力学学报, 2011, 28(3): 326-331. (Qin X Y, Zhang J M, Zhuang C. A boundary face method for potential problems in three dimensions

- based on parametric surface[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(3): 326-331. (in Chinese))
- [7] 龙述尧编著. 边界单元法概论[M]. 中国科学文化出版社, 2002, 3. (Long S Y. The Conspectus of the Boundary Element Method[M]. China Science and Culture Press, 2002, 3. (in Chinese))
- [8] Chati M K, Mukherjee S. The boundary node method for three-dimensional problems in potential theory[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47: 1523-1547.
- [9] Zhang J M, Tanaka M, Matsumoto T. Meshless analysis of potential problems in three dimensions with the hybrid boundary node method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 59: 1147-1160.
- [10] Liu Y J, Rudolph T J. New identities for fundamental solutions and their applications to non-singular boundary elements formulations[J]. Computational Mechanics, 1999, 24(4): 286-292.
- [11] Zhang J M, Tanaka M. Fast HdBNM for large-scale thermal analysis of CNT-reinforced composites[J]. Computational Mechanics, 2008, 41: 777-787.
- [12] Shaw Amit, Roy D. NURBS-based parametric mesh-free methods[J]. Computer Methods on Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197: 1541-1567.
- [13] 周焕林, 牛忠荣, 王喜秀. 二维热弹性力学边界元法中几乎奇异积分的正则化[J]. 固体力学学报, 2004, 25(2): 144-148. (Zhou H L, Niu Z R, Wang X X. The regularization of nearly singular integrals in the BEM of two-dimensional thermoelasticity[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2004, 25(2): 144-148. (in Chinese))
- [14] Zhang J M, Tanaka M. Adaptive spatial decomposition in fast multipole method[J]. Journal of Computational Physics, 2007, 226: 17-28.

ANALYSIS OF 3D LINEAR ELASTICITY PROBLEMS DIRECTLY ON GEOMETRIC MODEL WITH THE BOUNDARY FACE METHOD

Xianyun Qin Jianming Zhang Guangyao Li Zheng Zhang

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha, 410082)

Abstract This paper presents the boundary face method (BFM) based on boundary integral equations for solving 3D linear elasticity problems directly on geometric model. In the method, both boundary integration and variable approximation are performed in the parametric space of each boundary face. The geometric data at Gaussian integration points, such as the coordinates, the Jacobians and the outward normal, are calculated directly from the faces rather than from elements, and thus no geometric error will be introduced. The BFM has real potential to completely integrate with CAD system, because its implementation can be directly based on a CAD model through its boundary representation data. The structures with local small features are directly used for analysis, when all of geometry features are kept accurately according to their size in the real-world-coordinate system, instead of simplification for them. Numerical examples demonstrate that the proposed method effectively simulates thin shell based on 3D elastic theory and the complicated structure with detailed configurations in a simple way, and also provides more accurate results when compared with the finite element method (FEM).

Key words boundary integral equations, boundary face method, CAD model, 3D linear elasticity problems