

# 基于参数曲面三维势问题的边界面法

覃先云, 张见明\*, 庄超

(湖南大学 汽车车身先进设计与制造国家重点实验室, 长沙 410008)

**摘要:**提出了边界元法(BEM)的一种新的实现方法——边界面法(BFM)。在传统的边界元法中,单元不仅用来进行边界积分和函数插值,而且用来近似几何体。当离散网格较稀疏时,会引起较大几何误差,因而影响计算精度。本文基于参数曲面,将几何实体的边界曲面离散为参数空间里的曲面单元,边界积分和场变量的插值都是在曲面参数空间里进行。积分点的几何数据,如坐标、雅可比、外法向量都是直接由曲面算得,而不是通过单元插值近似,从而避免了几何误差。另外,该方法的实现是直接基于边界表征的CAD模型,做到了与CAD软件的无缝连接。三维位势问题的数值实例表明,该方法不仅比传统边界元法具有更高的精度,而且使用非常方便,容易做到自动分析。

**关键词:**边界元法;参数曲面;曲面单元;边界面法;CAE\CAD集成

**中图分类号:**O343.2      **文献标志码:**A

## 1 引言

在传统的边界元法中,把三维CAD几何模型离散成边界元分析模型后,CAD模型的原始几何信息基本丢掉。边界元分析的几何是基于网格单元通过Lagrange或Hermite插值方法近似的<sup>[1,8,9]</sup>。基于网格单元的几何插值引起的几何误差,从根本上会导致计算精度问题<sup>[2]</sup>,甚至对有些计算起着决定性的影响。边界元分析模型和CAD几何模型的分隔,使设计和分析成为两个互相独立的过程。在边界元自适应网格细分过程中,需要反复地与CAD系统进行交互,而每个阶段的交互是很复杂的。因此,尽管自适应网格细分技术理论已经成熟,但主要局限于学术研究,很少深入到工程分析应用领域<sup>[2]</sup>。

为了克服上述的缺点,L. Wang<sup>[3]</sup>通过几何细分方法使边界元法与CAD几何融合一体。类似地在有限元法中,T. J. R. Hughes等提出了基于非均匀有理B样条(NURBS)的等几何分析方法<sup>[2]</sup>;F. Cirak等利用曲面单元分析薄板变形问

题<sup>[4]</sup>等。本文基于参数曲面,提出了边界元法的一种新的实现方法,在这称为边界面法(BFM)<sup>[5]</sup>。该方法继承了以边界积分方程为基础的边界元法的许多优良特点。例如,它只需要对边界进行离散,使求解问题域降低一级,很大程度上简化了分析和计算程序<sup>[3]</sup>,也可以方便地求解无限域和奇异性问题。重要的是,这种方法具有等几何分析的特点。例如,不管以多么粗糙的网格离散,分析几何是精确的;另外,在自适应网格细分过程中,不需要再与CAD系统进行反复地交互,使自适应分析变得简单<sup>[2]</sup>。

边界面法是建立在以数学解析表达的参数曲面基础上的。不论是对边界的积分还是对场变量的插值都是在曲面的参数空间里进行。首先,把参数曲面离散成若干个等几何的参数曲面单元。单元节点 $i$ 记录的是曲面参数空间的参数坐标值 $(u_i, v_i)$ ,而非三维空间的物理坐标值 $(x_i, y_i, z_i)$ 。参数曲面单元相当于分片曲面(surface patch)。在数值积分过程中,被积函数的几何变量,比如高斯积分点的坐标、雅可比、外法向量是直接通过参数曲面单元中的曲面参数变量计算获得,而不是通过Lagrange或Hermite插值近似的。在参数空间里,可以通过移动最小二乘法(MLS)<sup>[5]</sup>、非均匀有理B样条(NURBS)<sup>[6]</sup>等方法对未知场变量进行插值

收稿日期:2009-06-12;修改稿收到日期:2009-12-15.

基金项目:国家自然科学基金(10972074);国家863计划(2008AA042507);湖南大学汽车车身先进设计与制造国家重点实验室自主课题(60870003)资助项目.

作者简介:覃先云(1981-),男,博士生;  
张见明\*(1965-),男,博士,教授  
(E-mail:zhangjianm@gmail.com).

逼近。

直接在曲面的参数空间内进行边界积分,直接利用 CAD 造型系统中参数曲面的几何信息是本文方法与当今主流 CAE 软件的重要不同之处。有限元法和传统边界元法中,函数的插值和数值积分(能量积分或边界积分)都是在单元内进行,且必须依赖于单元。本文方法中需要的分析计算的几何变量直接来自 CAD 几何模型,因而自然地与实体造型系统融为一体。

## 2 边界积分方程和离散

对任意三维域  $\Omega$ , 满足 Laplace 方程的位势边界值问题可以表示为

$$\begin{aligned} u_{,ii} &= 0, \quad \forall x \in \Omega \\ u &= \bar{u}, \quad \forall x \in \Gamma_u \\ u_{,i}n_i &\equiv q = \bar{q}, \quad \forall x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\Omega$  的整个边界为  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$ ,  $\bar{u}$  和  $\bar{q}$  分别是位势已知边界  $\Gamma_u$  和法向流已知边界  $\Gamma_q$  的边界值,  $n$  是边界外法向矢量,  $n_i$  是法向量分量,  $i = 1, 2, 3$ 。

上述问题可以转化为边界上的积分方程, 三维势问题常用的正则化边界积分方程为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} (u(s) - u(y)) q^s(s, y) d\Gamma - \\ &\int_{\Gamma} q(s) u^s(s, y) d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $q = \partial u / \partial n$ ;  $y$  和  $s$  分别为边界上的源点与场点;  $u^s(s, y)$  和  $q^s(s, y)$  为基本解。对三维势问题,

$$u^s(s, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(s, y)}, \quad q^s(s, y) = \frac{\partial u^s(s, y)}{\partial n} \quad (3)$$

式中  $r$  为原点和场点间的欧氏空间距离。

用边界面法求解边界积分方程(2)时,需要将区域  $\Omega$  的边界离散成若干个( $N_E$ )边界单元  $\Gamma_j$ , 和相应的  $N$  个节点。设节点  $k$  上的势和法向流值分别为  $u_k$  和  $q_k$ 。对任意节点  $k$ , 或  $u_k$  已知, 要么  $q_k$  已知。将边界上任意一点  $s$  的势  $u(s)$  和法向流  $q(s)$  分别表示为  $N$  个节点的值插函数, 即

$$u(s) = \sum_{k=1}^N N_k(s) u_k, \quad q(s) = \sum_{k=1}^N N_k(s) q_k \quad (4)$$

式中  $N_k(s)$  为形函数。

将边界离散后, 将式(4)代入式(2), 可以把式(2)的边界积分方程离散为关于  $N$  个节点未知量的方程, 即

$$\begin{aligned} 0 &= - \sum_{j=1}^{N_E} \int_{\Gamma_j} q^s(s, y) \sum_{k=1}^N (N_k(s) - N_k(y)) u_k d\Gamma + \\ &\sum_{j=1}^{N_E} \int_{\Gamma_j} u^s(s, y) \sum_{k=1}^N N_k(s) q_k d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

在任何情况下, 方程(5)右端的第一项是正则的。因此, 对任何边界单元可以用正则高斯积分计算这一项。但在同一边界单元内当场点  $s$  靠近源点  $y$  时, 第二项会产生弱奇异积分, 就需要特殊的奇异积分技术。该奇异积分技术的具体实现可参见文献[5]。在不同的边界单元内, 当场点  $s$  接近源点  $y$  时, 方程(5)右端的第二项就产生近奇异性<sup>[8,9]</sup>。当求解薄形结构或边界单元分布很不规则时, 就存在这种情况。我们也开发了计算近奇异积分的自适应技术<sup>[5]</sup>。

方程(5)可以组装成矩阵, 即

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6)$$

将方程(6)进行变换, 使未知量移到左边, 已知量移到右边, 形成线性方程组, 即

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{X}$  是  $u_k$  或  $q_k$  的未知数向量。求解方程(7), 就可以得到所有节点  $k(k = 1, 2, \dots, N)$  上未知量  $u_k$  或  $q_k$  的值。根据节点上的值, 相应地可以求得边界上和域内任意一点的势和法向流值<sup>[1,8]</sup>。

## 3 插值方案

在参数曲面上, 对物理场的未知量插值逼近有多种方法。张见明等<sup>[5]</sup>提出了基于参数曲面上的移动最小二乘(MLS)插值方案。Amit Shaw 等<sup>[6]</sup>利用非均匀有理 B 样条(NURBS)插值逼近未知量。在边界元法中, 节点只分布在边界曲面上。以上两种方案只需分别在每个独立的边界曲面上实施, 不依赖单元。用以上两种方法开发出的边界类型的无网格法, 虽然插值不需单元, 但仍然需要积分单元<sup>[5,6]</sup>。不管是利用 MLS 还是 NURBS 插值, 都能获得较高的精度, 但这两种方法很难用于复杂的裁剪曲面和具有狭长曲面的薄型结构; 另外, 需要选择经验参数, 计算效率较低, 不适宜用于求解大规模复杂的工程问题。为此, 本文利用 Lagrange 多项式在参数曲面单元内对未知量进行插值, 类似于有限元法中的二维平面单元<sup>[10]</sup>。本文利用推进波前法<sup>[11]</sup>离散几何实体的边界曲面, 生成参数曲面单元。数值实例表明, 利用该插值方法的边界面法稳

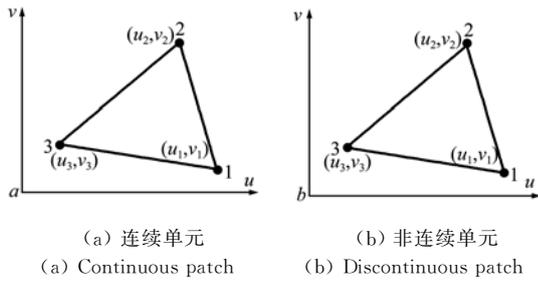


图 1 三角形曲面单元  
Fig. 1 A triangular surface patch

定性好, 计算效率高, 也可以获得较好的精度。

现以三节点的线性三角形单元为例, 说明在参数曲面上怎样实现变量插值。为方便处理边界奇异性及多域问题, 曲面边界上单元插值节点向曲面内做较小的偏移, 生成非连续单元图 1(b), 而在曲面的内部都采用连续单元图 1(a)。

假设三角形曲面单元三个插值点  $(u_i, v_i)$  上场变量值为  $\phi_i (i = 1, 2, 3)$ , 则单元内任意点变量值  $\phi(u, v)$  可以由下式插值函数计算近似得

$$\phi(u, v) = N_1(u, v)\phi_1 + N_2(u, v)\phi_2 + N_3(u, v)\phi_3 \quad (8)$$

式中  $N_i(u, v)$  为形函数, 分别为

$$N_1 = \frac{[(u - u_3)(v_2 - v_3) + (u_3 - u_2)(v - v_3)]}{2A} \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{[(u - u_1)(v_3 - v_1) + (u_1 - u_3)(v - v_1)]}{2A} \quad (10)$$

$$N_3 = \frac{[(u - u_2)(v_1 - v_2) + (u_2 - u_1)(v - v_2)]}{2A} \quad (11)$$

式中  $A$  是由插值点构成的三角形在曲面参数空间的面积常量, 其值由式(12) 计算得到。对势问题, 可以通过式(8) 近似计算单元内任意一点的势  $u(s)$  和法向流  $q(s)$ 。

$$A = \frac{1}{2} [(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)] \quad (12)$$

### 4 数值实例分析

通过三种类型的几何实体: 立方体, 圆环体和裁剪立方体, 来评估当前提出的方法。用立方体来考察该方法的收敛性质和求解精度。通过圆环体来比较边界面法和传统边界元法的求解精度。裁剪立方体的几何较复杂, 以说明基于参数曲面的当前方法与 CAD 软件无缝连接的优越性。利用文献[5] 中

的三种解析场来评估当前方法如下:

(1) 二次解 - 1 (Quadratic solution-1):

$$u = xy + yz + xz \quad (13)$$

(2) 二次解 - 2 (Quadratic solution-2):

$$u = -2x^2 + y^2 + z^2 \quad (14)$$

(3) 三次解 (Cubic solution):

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3yx^2 - 3xz^2 - 3zy^2 \quad (15)$$

为了估计误差和研究算法的收敛性, 定义  $L_2$  范数相对误差为

$$e = \frac{1}{|v|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i^{(e)} - v_i^{(n)})^2} \quad (16)$$

式中  $|v|_{\max}$  是  $N$  个样本点的最大值,  $v_i^{(e)}$  和  $v_i^{(n)}$  分别表示精确解和数值解。

以下各种算例, 是根据上述的解析解给定相应的边界条件, 求解 Laplace 方程  $\nabla^2 u = 0$ 。

#### 4.1 立方体 Dirichlet 问题和混合问题

首先, 考虑  $2 \times 2 \times 2$  的立方体, 其六个面坐标常量值分别为  $x = y = z = \pm 1$ 。方程(13 ~ 15) 分别作为 Laplace 方程控制场的解析解。对应各种解析解, 给立方体的各个面施加本质边界条件, 求解 Dirichlet 问题。利用推进波前法生成三节点线性插值的参数曲面单元来离散立方体的边界。以 192, 300, 636 和 1332 个三角形曲面单元的立方体边界离散方案为例, 施加不同的边界条件得到分析结果。这四种方案对应的节点数分别为 150, 216, 408 和 792 个。其中, 具有 636 个曲面单元和 408 个节点的离散方案, 如图 2 所示。利用方程(16) 计算节点  $q$  的相对误差。对不同离散方案和解析解, 节点  $q$  的相对误差和收敛性如图 3 所示。从图可以看出, 本文的方法不仅可以获得较好的精度而且具有较高的收敛性。

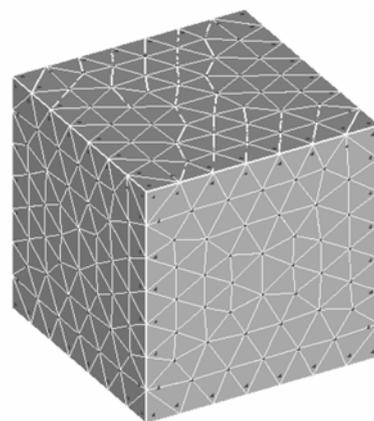


图 2 立方体边界离散  
Fig. 2 Discretization for the boundary of a cube

表 1 混合问题节点  $u$  与  $q$  的相对误差  
Tab. 1 Relative errors of nodal  $q$  and  $u$  for mixed problems

单元数(节点数)	150(192)	300(216)	636(408)	1332(792)
Err- $u$ (%)	1.122	0.704	0.325	0.145
Err- $q$ (%)	1.392	1.000	0.540	0.284

现分析混合边界条件的边界值问题。方程 (15) 用来作为解析解,相应地给立方体  $x = \pm 1$  的表面施加本质边界条件,对  $y = \pm 1$  和  $z = \pm 1$  的表面施加自然边界条件。对上述不同的离散方案进行分析,节点  $u$  和  $q$  的  $L_2$  相对误差(分别表示为 Err-  $u$  和 Err-  $q$ ) 见表 1。对混合边界值问题,数值分析结果也具有较好的精度和收敛性。

#### 4.2 圆环体 Dirichlet 问题

以大圆半径为 10,截面圆半径为 3,大圆圆心在原点的圆环体 Dirichlet 问题为例,分析比较边界面法与传统边界元法的求解精度。给圆环体的表面施加对于方程 (15) 三次解的本质边界条件。分别分析线性三角形曲面单元数为 144,154,248,356,538,768,1332,2136 和 2912 的圆环体表面的离散方案。方案对应的节点数分别为 78,100,153,212,

311,435,734,1153 和 1558。图 4 所示 BFM 离散方案的曲面单元和节点数分别为 538 和 311。分别用边界面法和边界元法<sup>[1]</sup>对上述同一离散方案进行分析。各种情况下节点  $q$  的相对误差如图 5 所示。从该图可以看出,随着单元的增加,这两种方法的数值解都收敛于精确解。但对相同的离散方案,BFM 的相对误差总是小于 BEM 的,特别是在网格较稀疏的情况下,表现得更为明显。BFM 用较少的曲面单元就可以把误差控制在 5% 左右,而 BEM 用同样数量的单元误差高达 20%。可见,BFM 求解精度明显高于 BEM,而且稳定性也高于 BEM。

BFM 具有上述的优良的特点,是因为 BFM 的所需几何信息直接通过参数曲面获得的,而不是像 BEM 用 Lagrange 或 Hermite 多项式在单元内进行插值近似的。这样,BFM 的分析模型避免了几何误差,而 BEM 的具有明显的几何误差。几何误差对分析精度有着重要的影响,甚至起着决定性的影响。

#### 4.3 裁剪立方体 Dirichlet 问题

为了说明 BFM 与 CAD 无缝连接的优越性,现以 CAD 软件中较复杂几何实体的势问题作为数值

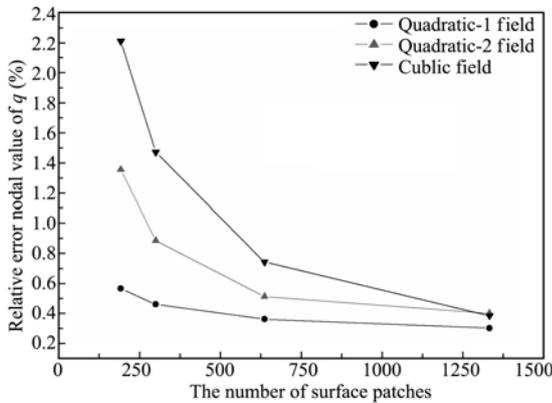


图 3 节点  $q$  相对误差和收敛性  
Fig. 3 Relative errors of nodal  $q$  and convergence rates

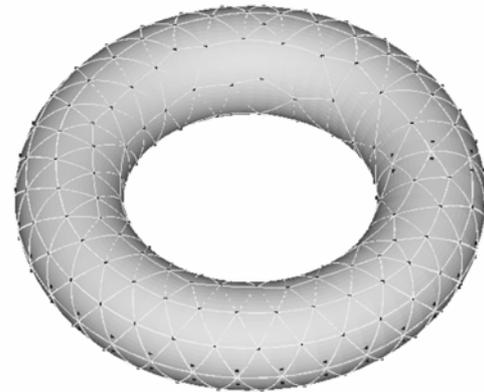


图 4 圆环体边界离散  
Fig. 4 Discretization for the boundary of a torus

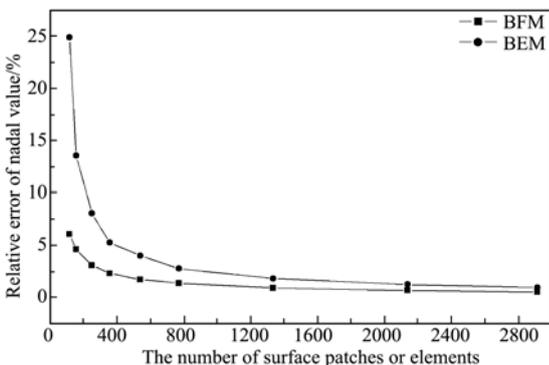


图 5 比较边界面法与边界元法节点  $q$  的相对误差和收敛性  
Fig. 5 Comparison of relative errors of nodal  $q$  and convergence rates between BFM and BEM

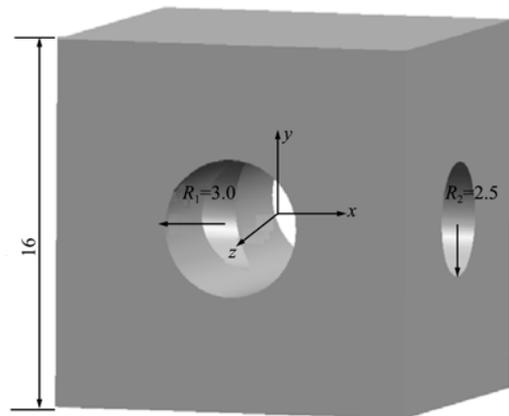


图 6 裁剪立方体及其主要尺寸  
Fig. 6 A trimmed cube and its main sizes

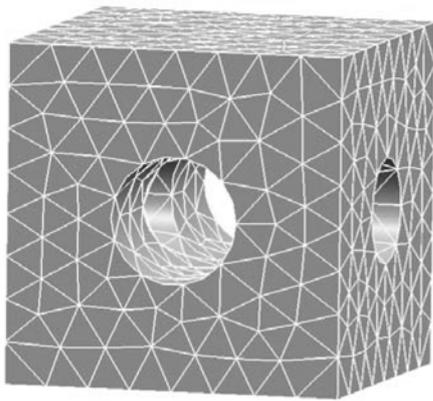


图 7 裁剪立方体边界离散

Fig. 7 Discretization for the boundary of the trimmed cube

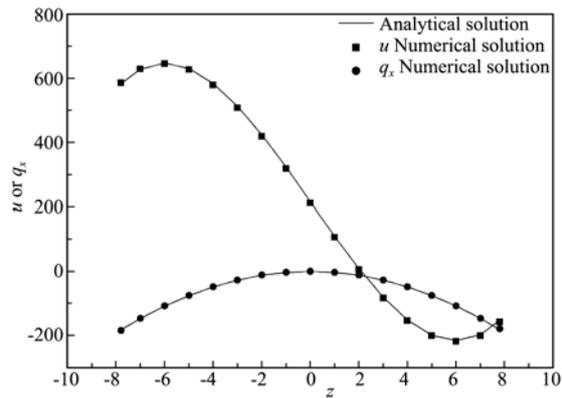
算例。首先,在 CAD 软件建模环境中,建立由两相互垂直的圆柱体分别与立方体做布尔减运算后产生的裁剪立方体。该实体的结构和主要尺寸如图 6 所示。基于 CAD 软件的二次开发,调用相关的函数获得该实体边界曲面的几何信息。利用三节点的线性曲面三角形单元离散裁剪立方体的边界。边界离散如图 7 所示,曲面单元数和节点数分别为 1049 和 687。对应方程(15),分别给该实体的每个曲面施加三次 Dirichlet 边界条件,然后进行求解。

分析立方体域内以坐标为(0, 0, 6.0, -7.8)和(0, 0, 6.0, 7.8)两端点的直线上均匀分布 17 个点的势  $u$  及其  $x$  方向导数  $q_x$ 。如图 8 所示,数值计算结果与对应的解析值基本吻合,即使是点很接近体的表面。计算接近体表面的点  $u$  和  $q_x$  值是利用了参考文献[5]描述的自适应近奇异积分技术,获得较精确的结果。

该实例说明了 BFM 可以直接利用 CAD 软件的造型模型。从边界的离散到对边界的积分和场变量的插值,都直接在 CAD 几何模型的曲面参数空间里完成;做到了与 CAD 软件无缝连接,使设计与分析融为一体。该问题的前期准备数据是相当简单的,直接利用 CAD 软件二次开发的相关函数获得该实体的九个参数曲面的几何信息,并利用推进波前法在曲面的参数空间里自动生成曲面三角形单元。

## 5 结 论

本文提出了基于参数曲面求解三维势问题的边界面法(BFM)。在此方法中,边界积分和变量的插值都是在曲面参数空间里进行。在积分过程中,几何变量是直接通过参数曲面计算获得。从而避免了几何误差,是一种等几何分析方法,具有等

图 8 域内点的势及其  $x$  方向导数Fig. 8 Potential and its  $x$ -derivative for points inner domain

几何分析的许多优良特点。

本文中三维势问题的数值实例表明 BFM 不但具有很好的收敛性,而且能获得较高的精度。对同一离散方案,该方法的精度高于传统边界元法的,特别是在离散网格稀疏的情况下表现更为明显。BFM 用相对较少的参数曲面单元就能获得可以接受的数值解,具有良好的稳定性。

BFM 只需要边界表征的几何实体的参数曲面,而大部分 CAD 商业软件中的几何实体采用边界表征,因此,BFM 可以方便地做到与 CAD 软件的无缝连接来实现 CAD 与 CAE 的集成。

## 参考文献 (References):

- [1] C A 布瑞比亚,等. 边界单元理论和工程应用[M]. 龙述尧,等译. 长沙:国防工业出版社,1988. (C A Brebbia, et al. *The Theory and Engineering Application of the Boundary Element Method* [M]. LONG Shu-yao, et al, translated, Changsha: National Defence Industry Press, 1988. (in Chinese))
- [2] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**: 4135-4195.
- [3] Wang L. Integration of CAD and boundary element analysis through subdivision methods[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, **57**(3): 691-698.
- [4] Cirak F M, Ortiz Fully C1-conforming subdivision elements for finite deformation thin shell analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **51**: 813-833.
- [5] Zhang Jian-ming, Qin Xian-yun, Han Xu, et al. A boundary face method for potential problems in three dimensions[J]. *International Journal for Numerical*

- Methods in Engineering*, 2009, **80**:320-337.
- [6] Amit Shaw, Roy D. NURBS-based parametric mesh-free methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**:1541-1567.
- [7] Kagan P, Fischer A. Integrated mechanically based CAE system using B-Spline finite elements[J]. *Computer Aided Design*, 2000, **32**:539-552.
- [8] 周焕林,牛忠荣,程长征,等. 各向异性位势问题边界元法中几乎奇异积分的解析算法[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(3): 333-338. (ZHOU Huan-lin, NIU Zhong-rong, CHENG Chang-zheng, et al. Analytical algorithm of the nearly singular integrals in boundary element method to anisotropic potential problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(3):333-338. (in Chinese))
- [9] 张耀明,孙焕纯. 弹性力学平面问题的无奇异边界积分方程[J]. 计算力学学报, 2001, **18**(3): 321-325. (ZHANG Yao-ming, SUN Huan-chun. Nonsingular boundary integral equations for elastic plane problems [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, **18**(3):321-325. (in Chinese))
- [10] 王勖成,邵敏. 有限元基本原理和数值方法(第2版)[M]. 北京:清华大学出版社, 1997. (WANG Xu-cheng, SHAO Min. *The Basic Principles of the Finite Element Method and Numerical methods*(2<sup>nd</sup> edition) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [11] Lee C K. Automatic adaptive metric advancing front triangulation over curved surfaces[J]. *Engineering Computations*, 2000, **17**:48-74.

## A boundary face method for 3D potential problems based on parametric surface

QIN Xian-yun, ZHANG Jian-ming\*, ZHUANG Chao

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body,  
Hunan University, Changsha 410008, China)

**Abstract:** This work presents a new implementation of the boundary element method (BEM), here called the boundary face method (BFM). The conventional BEM uses the standard elements for boundary integration and approximation of the geometry, and thus introduces errors of geometry. In this paper, the boundary faces of the geometry are discretized by patches in parametric space. Both boundary integration and variable approximation are also performed in the parametric space. The geometric data at Gaussian integration points, such as the coordinates, the Jacobians and the out normals are calculated directly from the faces rather than from elements, and thus no geometric error will be introduced. The BFM has real potential to seamlessly interact with CAD software, because its implementation can be directly based on a CAD model through its Brep data. Numerical examples for 3D potential problems demonstrate that the new method provides not only more accurate results than the conventional BEM, but also a new way toward automatic simulation, as simulations can be greatly simplified with our method.

**Key words:** BEM; parametric surface; surface patch; boundary face method