

DOI: 10.3880/j.issn.1006-7647.2010.01.006

快速杂交边界点法在水坝热传导分析中的应用

宋敏¹, 覃先云¹, 张见明¹, 何建平²

(1. 湖南大学汽车车身先进设计与制造国家重点实验室, 湖南长沙 410082;

2. 中国水电顾问集团中南勘测设计研究院, 湖南长沙 410014)

摘要:采用与快速多极算法(FMM)相结合的一种边界类型无网格法——杂交边界点法(HdBNM),以碾压混凝土为例进行多域稳态热传导分析。数值算例表明,快速杂交边界点法(FM-HdBNM)的计算精度在2%以内,求解过程效率不低于商业有限元软件。在考虑碾压混凝土中的多尺度构件(如冷却水管,其长度为其直径的几千倍)时,快速杂交边界点法因其对复杂几何模型的适应能力强而具有明显的优势,避免了像有限元那样将含有小构件的结构离散为网格模型时增大求解规模的问题。

关键词:杂交边界点法;快速多极算法;热传导分析;混凝土

中图分类号: O241; O414

文献标识码: A

文章编号: 1006-7647(2010)01-0027-03

Application of fast hybrid boundary node method to heat conduction in concrete dams//SONG Min¹, QIN Xian-yun¹, ZHANG Jian-ming¹, HE Jian-ping²(1. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacture for Automotive Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. Mid-South Design and Research Institute, Changsha 410014, China)

Abstract: A new boundary type meshless method, hybrid boundary node method was employed to analyze the multi-domain steady-state heat conduction in roller compacted concrete dams combined with the fast multipole method. The numerical results demonstrate that the relative error of the fast hybrid boundary node method is smaller than 2%, and the efficiency of its solving process is not lower than that of the commercial finite element software. As for the multi-scale components in the roller compacted concrete dams (such as the cooling water pipe, its length thousands of times its diameter), the fast hybrid boundary node method has obvious superiority owing to its strong adaptability to complex geometrical models. Accordingly, it can avoid the additional solving task of the finite element methods due to the mesh refinement when the structure contains very small components.

Key words: hybrid boundary node method; fast multipole method; thermal analysis; concrete

混凝土浇筑过程的热传导分析,目前普遍采用有限元法。但是有限元法在分析的过程中存在一些较难解决的问题。首先,在几何模型上需要生成离散的体单元网格模型,消耗大量时间和精力;其次,简化模型时容易忽略水坝的局部细节结构,而细节结构却最有可能产生热流集中并导致裂纹的产生;最后,对计算结果进行的后处理过程中采用等效的方法,网格需要划分得足够细才能近似模拟出热流集中位置。解决上述难题,杂交边界点法(HdBNM)是一种较好的工程数值计算分析方法。它既具有像边界元法的特点,即仅在边界上布点从而降低了求解问题的维数,而且是一种纯无网格法^[1-3],可以直接在CAD模型的表面分布离散的点进行数值模拟。因此,它可以很方便地模拟大坝的无限域和局部细

节特征。但是最后得到的方程组系数矩阵是一个非对称满秩的矩阵,从而限制了求解规模。1987年,耶鲁大学的Greengard等^[4]提出了快速多极算法。该算法能够快速完成特别密集矩阵与向量的乘积运算,并且同时降低空间复杂度^[5],使矩阵-向量乘法的计算代价从 $O(N^2)$ 减少到 $O(N)$ 。已有研究证实:能够将该算法用于加速求解边界元的计算^[6-7],使计算的空间复杂度和时间复杂度均降至 $O(N)$ 。本文将HdBNM和快速多极算法结合起来实现对混凝土进行稳态热传导数值仿真。

1 HdBNM

HdBNM建立在修正变分原理的基础上。在稳态热传导中,修正变分原理中有3个相互独立的场

基金项目:国家自然科学基金(10972074);国家高技术研究发展计划(863计划)(2008AA042507);教育部长江学者与创新团队发展计划(531105050037);湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主研究课题(60870003)

作者简介:宋敏(1985—),男,湖南醴陵人,硕士研究生,从事数值计算研究。E-mail: songmin1100@126.com

水利水电科技进展,2010,30(1) Tel: 025-83786335 E-mail: jz@hhu.edu.cn http://kbb.hhu.edu.cn

函数:域内温度场函数 φ , 边界上温度场函数 $\bar{\varphi}$ 和边界上法向流量场函数 \bar{q} 。对于三维域 Ω , 其边界 $\Gamma = \Gamma_\varphi + \Gamma_q$, Γ_φ 和 Γ_q 分别表示温度场和温度法向流量的已知边界。相应的修正泛函为

$$\Pi_{AB} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varphi_{,i} \varphi_{,i} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{q}(\varphi - \bar{\varphi}) d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \bar{\varphi} d\Gamma \quad (1)$$

其中, $\bar{\varphi}$ 满足强制边界条件, 即在 Γ_φ 上 $\bar{\varphi} = \varphi$ 。

考虑局部子域周围的每个节点, 变换式(1)可得到驻值条件。写成矩阵形式如下:

$$U_x = H\hat{\Phi} \quad (2)$$

$$Q_x = H\hat{q} \quad (3)$$

其中 U, Q, H 的公式参见文献[8]。 $\hat{\Phi}, \hat{q}$ 分别为边界上各个节点的温度值和法向流量值。对于给定问题, 在边界上节点 S_1 的 φ_1 或 q_1 值已知, 因而联立式(2)和式(3)就能解出未知量 x 。再将 x 回代入式(2)和式(3), 用系数矩阵 H 求解式(2)和式(3), 求得边界上未知的温度值或法向流量值。系数矩阵 U 和 Q 都是非对称满秩矩阵。直接迭代求解将是满秩矩阵与稠密向量的乘积, 它需要运算量的数量级为 $O(N^2)$ 。快速多极算法能够高效地实现矩阵-向量乘积。根据快速算法的基本思想, 将边界单元进一步形成边界叶子和边界簇结构。由 Taylor 级数的多极展开对核函数进行多极展开, 推出快速多极杂交边界点法的多极矩阵系数(式(4))。矩阵系数中各量和该算法的具体推导过程参见文献[9]。

$$L_n^{m'}(O_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R_{n-n'}^{m-m'}(\overrightarrow{O_1 O_1'}) L_n^m(Q_1') \quad (4)$$

式中: R 为实体球谐函数; L 为局部扩展系数。

2 数值算例与分析

数值算例使用的快速杂交边界点法(FM-HdBNN)采用C++编写。

以混凝土重力坝的一个坝段为例, 其结构如图1所示。水坝共分7层, 自上而下每层厚度分别为:

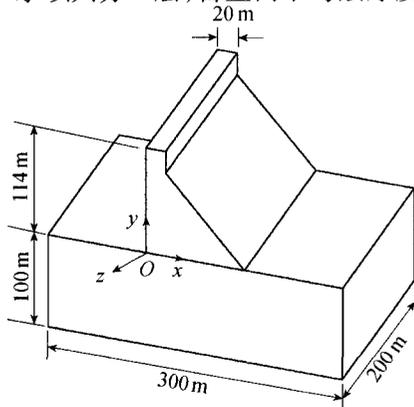


图1 混凝土模型

4 m, 8 m, 12 m, 20 m, 30 m, 40 m, 100 m。

2.1 单域稳态温度场

在混凝土模型中, 设每层的材料相同, 热导率 $\lambda = 2.4378 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{C})$, 假设表面温度边界条件为 $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3yx^2 - 3xz^2 - 3zy^2$ 。FM-HdBNN直接在混凝土CAD模型上布点, 节点个数分别为27100, 15384, 8492, 其中节点数为8492个的模型如图2所示。对相同的模型有限元商业软件MSC.Patran/Nastran进行网格划分的节点个数分别为: 121023, 69679, 33386, 其中节点数为33386个的模型如图3所示。对水坝每层取平行于端面的中心线位置上点的热流密度 q_x 进行对比, 并估计其相对误差, 误差估计公式为

$$e = \frac{1}{|q|_{\max}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_i^{(e)} - q_i^{(n)})^2} \quad (5)$$

式中: $q_i^{(e)}$ 为精确解; $q_i^{(n)}$ 为数值解。

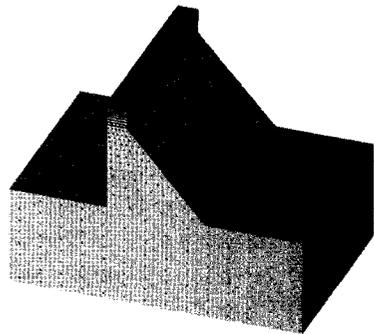


图2 混凝土的FM-HyBNM模型(8492个节点)

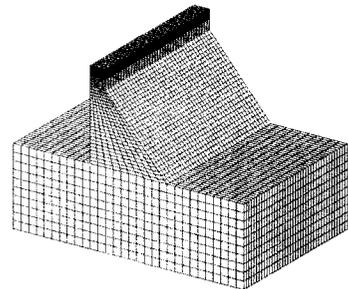


图3 混凝土的FEM模型(33386个节点)

精确解为表面温度边界条件 $F(x, y, z)$, 数值解分别为FM-HdBNN和FEM计算所得到的结果, 如表1所示。

表1 FM-HdBNN与FEM计算 q_x 的结果对比

方法	自由度/个	时间/s	q_x 精度/%			
			第4层	第5层	第6层	第7层
FM-HdBNN	27100	172	0.16	0.28	0.41	0.04
	15384	50	0.58	0.67	0.50	0.04
	8492	19	1.02	1.58	1.80	0.07
FEM	121023	265	0.32	0.37	0.45	0.45
	69679	82	0.33	0.38	0.70	0.46
	33386	25	0.65	0.66	1.46	0.90

注: FM-HdBNN包括分布节点时间和求解的时间; FEM只包括Nastran的求解时间, 不包括Patran的前处理时间。

从表 1 可以看出,在同一台个人计算机上 FM-HdBNM 的整个计算时间(包括前处理和求解时间)少于 FEM 的计算时间(仅包括求解器求解时间)。FM-HdBNM 在节点不过少的情况下,其计算精度比 FEM 更好。本算例说明 FM-HdBNM 在单域稳态温度场热传导分析中具有很高的精度和效率。

2.2 多域稳态温度场

对图 1 中的混凝土各层区域设置不同的材料参数,自上而下各层区域的热导率分别为 $2.575 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $2.475 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $2.375 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $2.325 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $2.275 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $1.275 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$, $2.4378 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{C})$ 。与 z 轴垂直的两界面设定为绝热边界条件,其他所有表面给定边界温度条件,其值如图 4 所示。然后分别用 FM-HdBNM 和 FEM 软件 MSC.Patran/Nastran 进行热传导分析。计算完成后取第 5 层与第 6 层平行于端面的中心线位置上的点 q_x 进行对比,如图 5 所示。从图 5 中可以看出,FM-HdBNM(22072 个节点)在模拟混凝土多域稳态热传导中,仿真计算所得的结果与 FEM(121023 个节点)的仿真结果基本保持一致。数值算例表明在稳态温度场中进行多域的热传导分析能够获得与 FEM 计算结果相同的精度。为进一步模拟含有水管的混凝土稳态温度场的热传导分析提供了可信的基础。

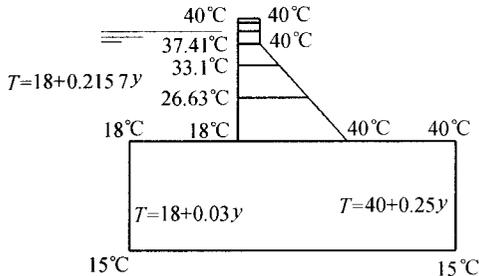


图 4 混凝土表面边界条件

2.3 加入水管多域稳态温度场

对于含有水管的混凝土,常规的 FEM 需要将网格模型的单元划分到足够小才能较好地模拟水管周围的热流情况。但是网格单元划分过细对水坝而言将大幅度增加求解规模。FM-HdBNM 不需要划分网格,只需在水管边界上布置离散的点,从而很好地克服了上述缺点。例如:在图 1 中的混凝土第 6 层埋入 5 根水管,长度为 65 m,直径为 0.03 m,壁厚为 0.01 m。钢管内壁的温度给定为 10 C ,计算模型如图 6 所示。然后用 FM-HdBNM 进行计算。完成计算后,在第 6 层域内平行于水管位置附近取一系列点对应的 q_x ,并与未加入水管时相同点对应的 q_x 进行比较,如图 7 所示。从图 7 中可以看出加入水管后,在其端部位置热流密度发生了很大的变化,基本符合实际。该算例表明 FM-HdBNM 具有处理含有

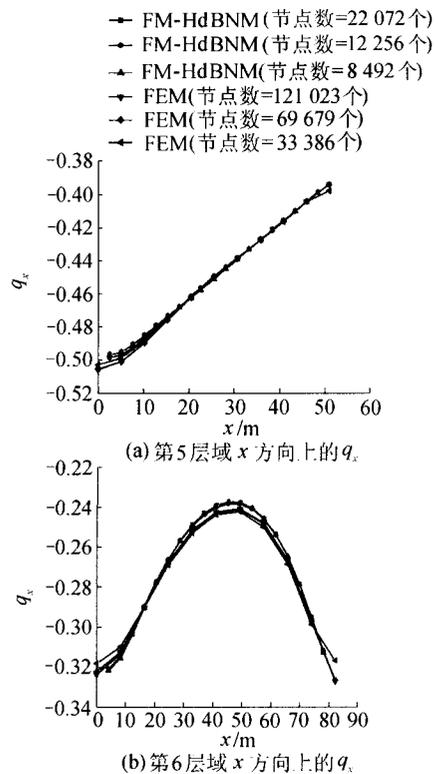


图 5 FM-HdBNM 与 FEM 在 x 方向上的 q_x

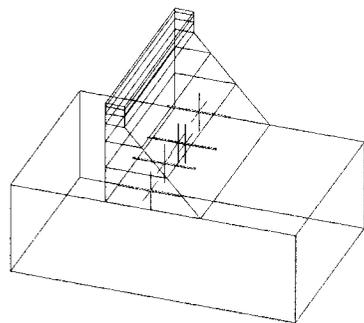


图 6 在混凝土第 6 层埋入 5 根水管

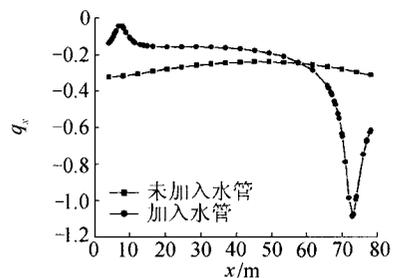


图 7 第 6 层域内平行于水管位置附近的点在 x 方向上的 q_x 水管的混凝土多域稳态温度场热传导问题的能力。

3 结论

在上述 3 个数值算例中,FM-HdBNM 都是直接在 CAD 模型上进行布点,无需像 FEM 一样在 CAD 模型上再生成网格模型。数值算例的结果表明:结合快速多极算法的杂交边界点法在混凝土的稳态热传导分析中保持了计算效率高和(下转第 34 页)

- [10] BROWN J H, GUPTA V K, LI Bai-lian, et al. The fractal nature of nature: power laws, ecological complexity and biodiversity [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 2002, 357: 619-626.
- [11] TUCKER C J, DREGNE H W, NEWCOMB W W. Mean and inter-year variation of growing-season normalized difference vegetation index for the Sahel 1981-1989 [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1991, 12: 1113-1115.
- [12] TUCKER C J, NEWCOMB W W, DREGNE H E. AVHRR data sets for determination of desert spatial extent [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 1994, 15: 3547-3565.
- [13] ELMORE A J, MUSTARD J F, MANNING S J, et al. Quantifying vegetation change in semiarid environments: precision and accuracy of spectral mixture analysis and normalized difference vegetation index [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2000(73): 87-102.
- [14] McGWIRE K, MINOR T, FENSTERMAKER L. Hyperspectral mixture modeling for quantifying sparse vegetation cover in arid environments [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2000 (72): 360-374.
- [15] 金晓媚, 胡光成, 李文梅. 中国西北地区额济纳绿洲植被盖度与黑河流量的滞后效应研究 [J]. *地学前缘*, 2008, 15(4): 198-203.
- [16] 孙文新, 曾群柱. 黑河下游干旱地区环境变化研究 [J]. *中国沙漠*, 1997, 17(2): 149-153.
- [17] 王根绪, 程国栋. 干旱荒漠绿洲景观空间格局及其受水资源条件的影响分析 [J]. *生态学报*, 2000, 20(3): 363-368.
- [18] DEERING D W. Rangeland reflectance characteristics measured by aircraft and spacecraft sensor [D]. Texas: Texas A&M University, College Station, 1978: 338.
- [19] HUTE A, JUSTICE C, Van LEEUWEN W. MODIS Vegetation Index (MODIS13) algorithm theoretical basis document [M]. New York: NASA Press, 1996: 35-39.
- [20] KING M D, GREENSTONE R. EOS reference handbook: a guide to NASA's earth science enterprise and the Earth Observing System [M]. Greenbelt: NASA/GSFC, 1999: 1-361.
- [21] 金晓媚, 刘金韬. 黑河下游地区地下水与植被生长的关系 [J]. *水利水电科技进展*, 2009, 29(1): 1-4.

(收稿日期: 2009-05-14 编辑: 方字形)

(上接第 29 页)

精度高的优点, 其次是前处理比 FEM 软件方便, 克服了 FEM 软件对细小特征采用等效方法将网格划分得足够细才能近似模拟的缺点。该法在边界上增加或减少节点非常容易, 所以适用于解决自适应问题、裂纹问题及接触问题。但是目前本文仅局限于模拟稳态热传导, 下一步结合双向互异法可推广到非稳态的热传导以模拟实际混凝土的热传导问题^[10]。

参考文献:

- [1] 张见明. 一种新的边界类型无网格法——杂交边界点法 [D]. 北京: 清华大学, 2002: 29-51.
- [2] ZHANG Jian-ming, YAO Zhen-han. Meshless regula hybrid boundary node method comput model [J]. *Eng Sci*, 2001, 2: 307-318.
- [3] ZHANG Jian-ming, YAO Zhen-han. A hybrid boundary node method [J]. *Int J Numer Meth Engng*, 2002, 53: 751-763.
- [4] GREENGARD L, ROKHLIN V. A fast algorithm for particle simulations [J]. *J Comp Phys*, 1987, 73: 325-348.
- [5] ZHANG Jian-ming, TANAKA M. Adaptive spatial decomposition on fast multiple Method [J]. *J Comput Phys*, 2007, 226: 17-28.
- [6] NISHIDA K, NISHIMURA N, KOBAYASHI S. Application of the fast multipole method to the 3D BEM analysis of electron guns [M]. Southampton: Southampton Computational Mechanics Publications, 1997: 229-629.

- [7] YOSHIDA T, NISHIMURA N, KOBAYASHI S. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 525-547.
- [8] ZHANG Jian-ming, TANAKA M, MATSUMOTO T. The hybrid boundary node method accelerated by fast multipole expansion technique for 3D potential problems [J]. *International J Num Meth Engng*, 2004, 63: 660-680.
- [9] YOSHIDA K. Applications of fast multipole method to boundary integral equation method [R]. Kyoto: Department of Global Environment Engineering, Kyoto University, 2001: 345-380.
- [10] TANAKA M, KUROKAWA K, MATSUMOTO T. A time-stepping DRBEM for transient heat conduction in anisotropic solids [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32: 1046-1053.

(收稿日期: 2009-02-17 编辑: 方字形)

